

Уравнения Пелля

А. СПИВАК

В ПРОШЛОМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА БЫЛИ СФОРМУЛИРОВАНЫ, но не доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Уравнение $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1; 0)$ при помощи правила $(x; y) \rightarrow (x + 2y; x + y)$.

Теорема 3. Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений $(3; 1)$ и $(5; 3)$ при помощи правила $(x; y) \rightarrow (3x + 4y; 2x + 3y)$.

Теорема 5. Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения $(1; 0)$ при помощи правила $(x; y) \rightarrow (2x + 3y; x + 2y)$.

Теорема 7. Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения $(0; 1)$ при помощи правила $(x; y) \rightarrow (x + y; x)$.

Можно было бы рассмотреть еще несколько примеров и сформулировать много аналогичных теорем, но пора переходить к более общим рассуждениям.

Формула

$$(x^2 - dy^2)(z^2 - dt^2) = (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2$$

Следующее вычисление – пожалуй, самое главное в теории уравнений Пелля:

$$\begin{aligned}(x^2 - dy^2)(z^2 - dt^2) &= x^2z^2 - dy^2z^2 - dx^2t^2 + d^2y^2t^2 = \\ &= x^2z^2 + 2xzdyt + d^2y^2t^2 - \\ &- dy^2z^2 - 2dyzxt - dx^2t^2 = (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2.\end{aligned}$$

А вот как можно получить ту же формулу, если разложить разность квадратов на (иррациональные!) множители и переставить их разумным образом:

$$\begin{aligned}(x^2 - dy^2)(z^2 - dt^2) &= \\ &= (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d})(z + t\sqrt{d})(z - t\sqrt{d}) = \\ &= (x + y\sqrt{d})(z + t\sqrt{d}) \cdot (x - y\sqrt{d})(z - t\sqrt{d}) = \\ &= (xz + dyt + (xt + yz)\sqrt{d}) \cdot (xz + dyt - (xt + yz)\sqrt{d}) = \\ &= (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2.\end{aligned}$$

Честно говоря, эта выкладка даже длиннее предыду-

щей. Но она, надеемся, гораздо прозрачнее. Зачем нам нужна доказанная формула? Чтобы строить из одних решений другие! Точнее говоря, формула доказывает следующую важную теорему.

Теорема 8. Если $x^2 - dy^2 = a$ и $z^2 - dt^2 = b$, то пара чисел $(X; Y) = (xz + dyt; xt + yz)$ удовлетворяет равенству $X^2 - dY^2 = ab$.

И опять сформулируем и не докажем теорему о том, как устроено множество решений уравнения Пелля.

Теорема 9. Если a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b , что $a^2 - db^2 = 1$, то уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1; 0)$ при помощи правила $(x; y) \rightarrow (ax + dby; bx + ay)$.

Упражнения

21. Уравнение а) $x^2 - 2y^2 = 14$; б) $x^2 - 2y^2 = 23^{23}$ имеет бесконечно много решений в целых числах, а уравнение в) $|x^2 - 2y^2 - 1004| = 1001$ не имеет ни одного. Докажите это.

22. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого представим в виде суммы квадратов 11 последовательных а) целых; б) натуральных чисел. в) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, квадрат каждого из которых представим в виде суммы квадратов 11 последовательных натуральных чисел.

23. Пусть a, b, x, y, z, t – рациональные числа, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2 = 0$ и хотя бы одно из чисел x, y, z и t отлично от нуля. Докажите, что существуют такие рациональные числа u, v и w , что $u^2 + av^2 + bw^2 = 0$ и $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$.

Теорема существования

Теорема 10. Для любого натурального числа d , не являющегося квадратом, существуют такие натуральные числа x и y , что $x^2 - dy^2 = 1$.

Вместе взятые, теоремы 8, 9 и 10 позволяют довольно ясно представить себе структуру множества решений уравнения Пелля. В одном из ближайших номеров журнала мы изложим четыре доказательства теоремы 10. А здесь у нас хватит сил только на то, чтобы доказать теоремы 2, 3, 5, 7 и 9. Впрочем, мы это сделаем двумя способами: сначала обойдемся без помощи иррациональностей, а затем при помощи иррациональностей изложим (по сути то же самое) доказательство и даже расскажем о решениях в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Упражнения

24. Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, $c \neq 0$ и уравнение $x^2 - dy^2 = c$ имеет хотя бы одно

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3.

решение в целых числах, то это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Выведите это из утверждения теоремы 10.

25. а) Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких целых a уравнение $a(x^2 - 1) = y^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах. б) Пусть a – целое число. Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких натуральных d уравнение $x^2 - dy^2 = a^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

26. Пусть n – натуральное число, $n > 1$. Докажите, что уравнение а) $x^2 - (n^2 - 1)y^2 = 1$; б) $x^2 - (n^2 + 1)y^2 = 1$; в) $x^2 - (n^2 + 2)y^2 = 1$; г) $x^2 - (n^2 - 2)y^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

27. Докажите, что при любом натуральном a уравнение

$$\text{а) } (a^2 + 1)(x^2 + 1) = y^2; \quad \text{б) } (a^2 - 1)(x^2 - 1) = y^2;$$

$$\text{в) } (a^2 + 1)(x^2 + 1) = y^2 + 1; \quad \text{г) } (a^2 - 1)(x^2 - 1) = y^2 - 1;$$

$$\text{д) } (a^2 + 1)(x^2 - 1) = y^2 - 1; \quad \text{е) } (a^2 - 1)(x^2 + 1) = y^2 - 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

28. Докажите, что ни при каком натуральном a уравнение

$$\text{а) } (a^2 + 1)(x^2 + 1) = y^2 - 1;$$

$$\text{б) } x^2 = (4a - 1)(y^2 + 1); \quad \text{в) } a(x^2 - 1) = y^2 + 1$$

не имеет решений в целых числах. *Указание к пунктам б) и в).* Воспользуйтесь тем, что число вида $y^2 + 1$ не может делиться на натуральное число вида $4n - 1$. Доказательство последнего факта можно прочесть, например, в статье «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 год.

29. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много четверок целых чисел, в каждой из которых числа попарно различны и таковы, что $x + y + z + t = x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2$. б) Уравнение $xy(x + 2)(y + 2) = z(z + 2)$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. в) Существует бесконечно много таких троек натуральных чисел, что произведение любых двух из этих чисел на единицу больше квадрата натурального числа. г) Для любого натурального числа a система уравнений

$$\begin{cases} xy - 1 = a^2, \\ yz - 1 = u^2, \\ zx - 1 = v^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, u и v . д) Для любого натурального числа n существует бесконечно много таких наборов из $k = 3n^2 - 1$ последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов сама является квадратом натурального числа. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой 10.

30 * (М618). Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких натуральных n , что $n!$ делится на $n^2 + 1$. б) Для любого числа $\alpha > 0$ существует бесконечно много таких натуральных n , что $[\alpha n]!$ делится на $n^2 + 1$.

Доказательства теорем

Теорема 2

Пусть X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = X, \\ x + y = Y \end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases} x = 2Y - X, \\ y = X - Y. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 &= (2Y - X)^2 - 2(X - Y)^2 = \\ &= 4Y^2 - 4XY + X^2 - 2(X^2 - 2XY + Y^2) = -(X^2 - 2Y^2). \end{aligned}$$

Понимаете, в чем идея? Каждой паре $(X; Y)$, являющейся решением уравнения $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$, мы сопоставляем ее «предшественницу» – пару $(x; y) = (2Y - X; X - Y)$, удовлетворяющую равенству $x^2 - 2y^2 = \mp 1$.

Лемма. Если X, Y – натуральные числа и $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$, то $2Y - X$ и $X - Y$ – неотрицательные числа, причем $X - Y < Y$.

Доказательство. Будем рассуждать «от противного». Если $2Y - X < 0$, то $X > 2Y$ и $X^2 - 2Y^2 > 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 \geq 2 > 1$, что противоречит равенству $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$. Если $X - Y < 0$, то $X < Y$ и $X^2 - 2Y^2 < Y^2 - 2Y^2 = -Y^2 \leq -1$. Наконец, если $X - Y \geq Y$, то $X \geq 2Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 \geq 2 > 1$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Эта лемма – основа доказательства теоремы 2. А именно, взяв любую пару $(X; Y)$ натуральных чисел, удовлетворяющую равенству $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$, мы можем рассмотреть ее предшественницу – пару $(x; y)$. При этом $y < Y$. Если x и y – натуральные числа, то у пары $(x; y)$ есть своя предшественница, у той – своя, и так далее. Бесконечно этот процесс продолжаться не может: неравенство $y < Y$ гарантирует, что начатый с пары $(X; Y)$ процесс образования предшественниц оборвется не более чем через Y шагов. (Любитель строгости сказал бы, что здесь мы воспользовались отсутствием бесконечно убывающей последовательности натуральных чисел.)

В какой момент обрывается процесс образования пар-предшественниц? Очевидно, когда очередная пара $(x; y)$ состоит не только из натуральных чисел, проще говоря, когда одно из чисел x и y равно нулю. Число x равняться нулю не может, а вот равенство $x^2 - 2 \cdot 0^2 = \pm 1$ возможно. И возможно оно лишь при $x = 1$ (напоминаем: $x \geq 0$).

Итак, для любого решения $(X; Y)$ уравнения $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$ процесс образования пар-предшественниц остановится, дойдя до пары $(1; 0)$. Проследив этот процесс в обратном направлении, т.е. не от пары $(X; Y)$ к паре $(1; 0)$, а от пары $(1; 0)$ к паре $(X; Y)$, мы видим, что он происходит по формуле $(x; y) \rightarrow (x + 2y; x + y)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Упражнения

31. На листе клетчатой бумаги размером 32×40 клеток нарисован прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в узлах клеток. На его катетах как на гипотенузах во внешнюю сторону нарисованы равнобедренные прямоугольные треугольники. Оказалось, что разность пло-

шадей этих двух треугольников отличается от площади исходного треугольника менее чем на $1/2$. Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

32. Как известно, $1 + 2 = 3$. Легко проверить также, что $1 + 2 + 3 + \dots + 13 + 14 = 105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$. Найдите все такие n , что сумма первых n натуральных чисел равна сумме нескольких последующих.

Теорема 3

Доказательство теоремы 3 похоже на доказательство теоремы 2. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 3x + 4y = X, \\ 2x + 3y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 3X - 4Y$ и $y = 3Y - 2X$, замечаем, что

$$x^2 - 2y^2 = (3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = X^2 - 2Y^2,$$

а затем формулируем и доказываем следующую лемму.

Лемма. Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - 2Y^2 = 7$, и выполнено неравенство $Y \geq 6$, то $3X - 4Y$ и $3Y - 2X$ – тоже натуральные числа, причем $3X - 4Y < X$.

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $3X - 4Y \leq 0$, то $X \leq \frac{4}{3}Y$ и $7 = X^2 - 2Y^2 \leq \frac{16}{9}Y^2 - 2Y^2 < 0$. Если $3Y - 2X \leq 0$, то $X \geq \frac{3}{2}Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq \frac{9}{4}Y^2 - 2Y^2 = \frac{Y^2}{4} > 7$. Наконец, если $3X - 4Y \geq X$, то $X \geq 2Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 > 7$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится почти так же, как и доказательство теоремы 2. Чтобы понять, где может остановиться процесс образования пар-предшественниц, достаточно разобрать случаи $Y = 1, 2, 3, 4, 5$. Сделав это, вы найдете, как и следовало ожидать, два решения: (3; 1) и (5; 3).

Теорема 5

Доказательство теоремы 5 похоже на доказательства теорем 2 и 3. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = X, \\ x + 2y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 2X - 3Y$ и $y = 2Y - X$, замечаем, что

$$x^2 - 3y^2 = (2X - 3Y)^2 - 3(2Y - X)^2 = X^2 - 3Y^2,$$

а затем формулируем и не доказываем (надеясь на читателя) следующую лемму.

Лемма. Если X, Y – натуральные числа, причем $X^2 - 3Y^2 = 1$, то $2X - 3Y$ и $2Y - X$ – неотрицательные числа, причем $2Y - X < Y$.

Окончание доказательства – как в теореме 2.

Теорема 7

Из системы

$$\begin{cases} x + y = X, \\ x = Y \end{cases}$$

находим $x = Y$ и $y = X - Y$. Очевидно,

$$\begin{aligned} x^2 - xy - y^2 &= Y^2 - Y(X - Y) - (X - Y)^2 = \\ &= Y^2 - XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = -(X^2 - XY - Y^2). \end{aligned}$$

Лемма. Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$, то $X \geq Y$, причем равенство выполнено лишь в случае $X = Y = 1$.

Доказательство. Как всегда, рассуждаем «от противного». Если $X < Y$, то $X^2 - XY - Y^2 < -Y^2 \leq -1$, что несовместимо с условием $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$. Если же $X = Y$, то $X^2 - XY - Y^2 = -X^2$. Очевидно, $-X^2$ не равняется 1, а $-X^2 = -1$ лишь при $X = 1$. Лемма доказана. Теперь читатель, надеемся, самостоятельно завершит доказательство теоремы 7.

Упражнение 33 (М39). а) Целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m – данное натуральное число, $m > 1$) тогда и только тогда, когда x и y – соседние члены последовательности $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = m, a_3 = m^2 - 1, a_4 = m^3 - 2m, a_5 = m^4 - 3m^2 + 1, \dots$, в которой $a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k$ для всех $k \geq 0$. Докажите это. б) Рассмотрим случай $m = 3$. Очевидно, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8, a_4 = 3 \cdot 8 - 3 = 21$. Возникает гипотеза, что для любого n число a_n – это $(2n)$ -й член последовательности Фибоначчи. Докажите эту гипотезу.

Теорема 9

Идея доказательства уже была применена нами четырежды. Применим же ее в пятый раз. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xz + dyt = X, \\ xt + yz = Y. \end{cases}$$

Чтобы найти x , домножим первое уравнение на z , второе – на dt и вычтем затем второе уравнение из первого:

$$zX - dtY = xz^2 - dxt^2 = x,$$

поскольку $z^2 - dt^2 = 1$. Аналогично, чтобы найти y , домножим первое уравнение на t , второе на z и вычтем второе уравнение из первого:

$$Xt - Yz = dyt^2 - yz^2,$$

откуда $y = Yz - Xt$.

Лемма. Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - dY^2 = 1$, а z – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число t , что $z^2 - dt^2 = 1$, то $zX - dtY \geq 0$ и $Yz - Xt \geq 0$, причем $Yz - Xt < Y$.

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $zX - dtY < 0$, то $X < \frac{dtY}{z}$ и, следовательно,

$$1 = X^2 - dY^2 < \left(\frac{dtY}{z}\right)^2 - dY^2 = dY^2 \frac{dt^2 - z^2}{z^2} < 0.$$

Если $Yz - Xt < 0$, то

$$X^2 - dY^2 > \frac{Y^2 z^2}{t^2} - dY^2 = \frac{Y^2 z^2 - dY^2 t^2}{t^2} = \frac{Y^2}{t^2} \geq 1.$$

(Последнее неравенство следует из того, что наименьшему z отвечает и наименьшее t .) Если же $Yz - Xt \geq Y$, то $X \leq (Yz - Y)/t$ и

$$\begin{aligned} X^2 - dY^2 &\leq \frac{Y^2(z-1)^2}{t^2} - dY^2 = \\ &= Y^2 \frac{z^2 - 2z + 1 - dt^2}{t^2} = Y^2 \frac{2 - 2z}{t^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится в точности так, как доказательство теоремы 2.

Упражнения

34*. Докажите следующие утверждения. а) Для любого простого числа p существуют такие целые числа x и y , что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{p}$. б) Если p – нечетное простое число, n – натуральное, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на p^n , то существуют такие целые числа z и t , что $(x + p^n z)^2 - 34(y + p^n t)^2 + 1$ делится на p^{n+1} . в) Если $n > 2$ – натуральное число, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1} , то число $(x + 2^{n-1})^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^{n+1} . г) Если m_1 и m_2 – взаимно простые натуральные числа, для которых существуют такие целые числа x_1, y_1, x_2 и y_2 , что $x_1^2 - 34y_1^2 \equiv -1 \pmod{m_1}$ и $x_2^2 - 34y_2^2 \equiv -1 \pmod{m_2}$, то существуют такие целые числа x и y , что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m_1 m_2}$. д) Для любого натурального m сравнение $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m}$ имеет решения в целых числах x и y . е) Уравнение $x^2 - 34y^2 = -1$ не имеет решений в целых числах.

Замечание. Ситуация, когда сравнения имеют решения, а уравнение не имеет, не столь уж редка. Например, для любого натурального числа m сравнение $(3x+1)(2x+1) \equiv 0 \pmod{m}$ имеет решения в целых числах, а уравнение $(3x+1)(2x+1) = 0$ не имеет целых решений. Тем интереснее знать, что 34 – наименьшее натуральное число d , для которого все сравнения вида $x^2 - dy^2 \equiv -1 \pmod{m}$ имеют решения, а уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ целочисленных решений не имеет. (Проверьте это!)

35. Докажите следующие утверждения. а) Если a, b – такие натуральные числа, что $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2001} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$, то $3a^2 - 2b^2 = 1$. б) Если a и b – такие натуральные числа, что $3a^2 - 2b^2 = 1$, то для некоторого нечетного натурального числа n имеем $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n$.

36. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b , что $a^2 + 1$ делится на b , а $b^2 + 1$ делится на a . б) Если $x < y$ – натуральные числа и $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$, то $x = \Phi_{2n-1}$ и $y = \Phi_{2n+1}$, где n – некоторое натуральное число. в) Если a, b и $c = \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ – натуральные числа, то $c = 3$. г) Если два натуральных числа таковы, что увеличенный на единицу квадрат любого из них делится на другое, то произведение этих чисел на единицу больше квадрата их разности. д) Уравнение $x^2 - (n^2 - 4)y^2 = -4$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это. е) Уравнение $x^2 - (n^2 - 4)y^2 = -1$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это.

Указание. Воспользуйтесь утверждениями теоремы 10 и предыдущим пунктом.

37 (M1225). Докажите, что a^* если для натуральных чисел a и b число $(a^2 + b^2)/(ab - 1)$ натуральное, то оно равно 5; б) уравнение $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

38. Для любого натурального n число $\left[(3 + \sqrt{11})^{2n-1} \right]$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1} . Докажите это.

39. Для любого (не)четного натурального n число

$$\left[\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - 1 = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2$$

является (упятеренным) квадратом натурального числа. Докажите это.

40. а) Существуют такие иррациональные числа $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, что ни при каких натуральных m и n целые части чисел α^m и β^n не совпадают. Докажите это. б) Придумайте такую последовательность иррациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, что равенство $[\alpha_r^m] = [\alpha_s^n]$, где r, s, m и n – натуральные числа, верно лишь при $r = s$ и $m = n$.

Уравнение $C_x^{y-1} = C_x^y$

Разберем еще один пример. Он, возможно, покажется вам слишком специальным. Но, в конце концов, если уравнение $C_x^{y-1} = C_x^y$ никак не заинтересовало вас и вы уверены, что оно не заинтересует вас никогда, то перейдите сразу к следующему разделу статьи.

К уравнению $C_x^{y-1} = C_x^y$ можно прийти, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, **1001**, **2002**, **3003**, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

Коротко расскажем о числах сочетаний C_n^m тем, кто с ними еще не знаком. В n -й строке треугольника Паскаля на m -м месте стоит число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

причем нумерация чисел в каждой строке, как и нумерация самих строк, начинается с нуля. Основное правило образования треугольника Паскаля таково: *сумма любых двух соседних чисел некоторой строки равна числу следующей строки, которое расположено «ниже них и между ними»*; другими словами, для любых натуральных чисел m и n , где $m \leq n$, верно равенство

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m.$$

Очевидно, $1001 + 2002 = 3003$. Это означает, что $C_{14}^4 + C_{14}^5 = C_{14}^6$. Последнее равенство можно записать в виде

$$C_{15}^5 = C_{14}^6.$$

И вообще, любое равенство вида $C_n^{m-2} + C_n^{m-1} = C_n^m$ можно записать в виде $C_{n+1}^{m-1} = C_n^m$.

Теорема 11. *Равенство $C_x^{y-1} = C_x^y$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = \Phi_{2k}\Phi_{2k+1}$ и $y = \Phi_{2k-1}\Phi_{2k}$, где k – некоторое натуральное число.*

Мы докажем это довольно неожиданное утверждение двумя способами. Первый заимствован из статьи А. Ширшова «Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$ » («Квант» № 4 за 1977 год). Прежде всего выразим числа сочетаний

через факториалы:

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} = \frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!}.$$

После очевидных преобразований получаем

$$xy = (x-y+1)(x-y).$$

Теперь применим некоторый специальный трюк. Обозначим буквой d наибольший общий делитель чисел x и y . Тогда $x = ad$ и $y = bd$, где a и b взаимно просты. Подставив выражения для x и y в уравнение, после сокращения на d получим равенство

$$abd = (ad - bd + 1)(a - b).$$

Поскольку числа $a - b$ и ab взаимно просты и поскольку числа d и $ad - bd + 1$ тоже взаимно просты, то

$$\begin{cases} ab = ad - bd + 1, \\ d = a - b, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} a = b + d, \\ (b + d)b = (b + d)d - bd + 1. \end{cases}$$

Последнее уравнение после упрощений приобретает вид

$$b^2 + bd - d^2 = 1.$$

Его решения в натуральных числах нам известны из предыдущего номера журнала: $b = \varphi_{2k-1}$ и $d = \varphi_{2k}$, где k – натуральное число. Таким образом,

$$\begin{cases} x = ad = (\varphi_{2k-1} + \varphi_{2k})\varphi_{2k} = \varphi_{2k}\varphi_{2k+1}, \\ y = bd = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}, \end{cases}$$

как и было обещано. Например, при $k = 1, 2, 3$ имеем, соответственно, $(x; y) = (2; 1), (15; 6), (104; 40)$.

Замечание. Строго говоря, надо бы проверить, что всякая пара чисел $(x; y) = (\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}; \varphi_{2k-1}\varphi_{2k})$ удовлетворяет равенству $(x - y + 1)(x - y) = xy$. Немного подумав, можно понять, что это очевидно: двигаться «снизу вверх» по только что изложенному решению даже легче, чем «сверху вниз». Впрочем, можно обойтись и без использования интеллекта:

$$x - y = \varphi_{2k+1}\varphi_{2k} - \varphi_{2k-1}\varphi_{2k} = (\varphi_{2k+1} - \varphi_{2k-1})\varphi_{2k} = \varphi_{2k}^2$$

и

$$x - y + 1 = \varphi_{2k}^2 + 1,$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$\varphi_n \pmod 5$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2
$\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} \pmod 5$	1	3	4	2	1	3	4	2	1	3	4	2	1	

так что

$$(x - y + 1)(x - y) = (\varphi_{2k}^2 + 1)\varphi_{2k}^2 = \varphi_{2k}\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}\varphi_{2k} = xy.$$

(Мы воспользовались тождеством $\varphi_{2k}^2 + 1 = \varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}$, которое является частным случаем тождества упражнения 20,а.)

Мы решили уравнение

$$(x - y + 1)(x - y) = xy,$$

применив довольно неожиданный трюк. Но есть и другой – стандартный – способ. А именно, есть стандартная схема, по которой решают в целых числах уравнения второй степени. Давайте посмотрим, как эта

схема работает. Первым делом раскроем скобки и приведем подобные:

$$x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0.$$

Теперь освободимся от членов первой степени. Для этого выполним замену $x = X + a$, $y = Y + b$, получив уравнение

$$\begin{aligned} X^2 + 2aX + a^2 - 3XY - 3aY - 3bX - 3ab + Y^2 + \\ + 2bY + b^2 + X + a - Y - b = 0, \end{aligned}$$

и приравняем коэффициенты при X и Y к нулю:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 1 = 0, \\ -3a + 2b - 1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим $a = -1/5$ и $b = 1/5$. При этих значениях a и b уравнение принимает вид

$$X^2 - 3XY + Y^2 = \frac{1}{5},$$

где $X = x + \frac{1}{5}$ и $Y = y - \frac{1}{5}$. Домножив обе части уравнения на 20, получаем

$$20X^2 - 60XY + 20Y^2 = 4,$$

$$5(4X^2 - 12XY + 9Y^2) - 25Y^2 = 4,$$

$$(5Y)^2 - 5(2X - 3Y)^2 = -4,$$

$$z^2 - 5t^2 = -4,$$

где $z = 5Y = 5y - 1$ и $t = 2X - 3Y = 2x - 3y + 1$.

Пора воспользоваться следствием из теоремы 7. А именно, *все решения уравнения $z^2 - 5t^2 = \pm 4$ в натуральных числах даются формулой $(z; t) = (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}; \varphi_n)$* . При этом знаку «+» соответствуют четные n , а знаку «-» – нечетные. Осталось понять, при каких нечетных n число $z = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}$ дает остаток 4 при делении на 5. Выпишем остатки от деления нескольких первых чисел Фибоначчи на 5:

Закономерность очевидна: $n \equiv 3 \pmod 4$.

Итак, $y = \frac{z+1}{5} = \frac{\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} + 1}{5}$ и

$$\begin{aligned} x = \frac{t + 3y - 1}{2} &= \frac{\varphi_n + 3 \frac{\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} + 1}{5} - 1}{2} = \\ &= \frac{\varphi_{n+1} + \varphi_{n+3} - 1}{5}, \end{aligned}$$

где $n \equiv 3 \pmod 4$. Обозначив $n = 4k - 1$, запишем эти формулы в виде $x = \frac{\varphi_{4k} + \varphi_{4k+2} - 1}{5} = \varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и

$y = \frac{\varphi_{4k-2} + \varphi_{4k} + 1}{5} = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$ (мы воспользовались тождеством $\varphi_{2m} + \varphi_{2m+2} - (-1)^m = 5\varphi_m\varphi_{m+1}$ – см. упражнение 42). Теорема 11 доказана.

Упражнения

41. Докажите, что если x, y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0$ и неравенству $x \geq y$, то $2x \geq 3y$.

42. Докажите

- а) сравнение $\varphi_{n+3} + \varphi_{n+5} \equiv \varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} \pmod{5}$;
 б) тождества $\varphi_{2m} = \varphi_{m+1}^2 - \varphi_{m-1}^2$ и $\varphi_{2m+1} = \varphi_m^2 + \varphi_{m+1}^2$;
 в) тождество $\varphi_{2m} + \varphi_{2m+2} = 5\varphi_m\varphi_{m+1} + (-1)^m$.

43 (M905). Уравнение $4x^n + (x+1)^2 = y^2$ относительно натуральных чисел x и y а) имеет бесконечно много решений при $n = 2$; б) не имеет решений, если $n \neq 2$ и n – натуральное число. Докажите это.

Использование иррациональностей

Неравенства, неравенства, неравенства... Есть ощущение какого-то фокуса, когда все сходится, но причина удачи спрятана и не видна наивному зрителю. Сейчас мы докажем теорему 9 заново. Надеемся, этим мы поможем вам вполне уяснить доказательство этой теоремы.

Лемма 1. Если $x^2 - dy^2 > 0$ и $x + y\sqrt{d} > 0$, то $x > 0$.

Доказательство.

$$2x = x + y\sqrt{d} + \frac{x^2 - dy^2}{x + y\sqrt{d}} > 0.$$

Есть и другой способ – «от противного». Предположим, что $x \leq 0$. Тогда обе части неравенства $y\sqrt{d} > -x$ можно возвести в квадрат:

$$dy^2 > x^2,$$

что противоречит неравенству $x^2 - dy^2 > 0$.

Лемма 2. Если $x^2 - dy^2 = 1$ и $x + y\sqrt{d} > 1$, то $y > 0$.

Доказательство. Пусть $y \leq 0$. Тогда

$$x - y\sqrt{d} \geq x + y\sqrt{d} > 1.$$

Произведение чисел $x - y\sqrt{d}$ и $x + y\sqrt{d}$, каждое из которых больше 1, не может равняться 1.

Лемма 3. Если $a^2 - db^2 = x^2 - dy^2$ и $x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, причем числа a, b, x и y неотрицательные, то $x < a$ и $y < b$.

Доказательство.

$$a - b\sqrt{d} = \frac{a^2 - db^2}{a + b\sqrt{d}} < \frac{x^2 - dy^2}{x + y\sqrt{d}} = x - y\sqrt{d}.$$

Сложив неравенства

$$-x + y\sqrt{d} < -a + b\sqrt{d}$$

и

$$x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d},$$

получаем $2y\sqrt{d} < 2b\sqrt{d}$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 4. Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b , что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $1 < x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, то $x^2 - dy^2 \neq 1$.

Доказательство. Предположим противное: $x^2 - dy^2 = 1$. Тогда в силу лемм 1 и 2 числа x и y положительны. В силу леммы 3 имеем $x < a$. Получили противоречие.

Следующая теорема – это другая формулировка теоремы 9.

Теорема 12. Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b , что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа, $x^2 - dy^2 = 1$ и $x + y\sqrt{d} > 0$, то для некоторого целого числа n верно равенство $x + y\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^n$.

Доказательство. Обозначим $q = a + b\sqrt{d}$. Поскольку числа a и b натуральные, то $q > 1$. Рассмотрим возрастающую геометрическую прогрессию:

$$1 < q < q^2 < q^3 < q^4 < q^5 < \dots$$

Она стремится к бесконечности. А убывающая геометрическая прогрессия

$$1 > \frac{1}{q} > \frac{1}{q^2} > \frac{1}{q^3} > \frac{1}{q^4} > \frac{1}{q^5} > \dots$$

стремится к нулю. Поэтому существует такое целое n , что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \leq q^n.$$

Рассмотрим число

$$E = (x + y\sqrt{d}) : q^{n-1}.$$

Очевидно, $1 < E \leq q$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{(a - b\sqrt{d})(a + b\sqrt{d})} = \\ &= \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - db^2} = a - b\sqrt{d}, \end{aligned}$$

то

$$E = (x + y\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})^{n-1}.$$

Воспользовавшись формулой

$$(r + s\sqrt{d})(u + v\sqrt{d}) = (ru + dsv) + (rv + su)\sqrt{d},$$

мы заключаем, что число E представимо в виде $E = z + t\sqrt{d}$, где z, t – целые числа. Переходя к сопряженным числам, получаем

$$z - t\sqrt{d} = (x - y\sqrt{d})(a + b\sqrt{d})^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z^2 - dt^2 &= (z + t\sqrt{d})(z - t\sqrt{d}) = \\ &= (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d})(a - b\sqrt{d})^{n-1}(a + b\sqrt{d})^{n-1} = \\ &= (x^2 - dy^2)(a^2 - db^2)^{n-1} = 1. \end{aligned}$$

Итак, числа z и t целые, $1 < z + t\sqrt{d} \leq a + b\sqrt{d}$ и $z^2 - dt^2 = 1$. В силу леммы 4 это возможно лишь в случае равенства $z + t\sqrt{d} = a + b\sqrt{d}$, т.е. в случае

$$x + y\sqrt{d} = q^n,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 44. Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b , что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $x^2 - dy^2 = 1$, то для некоторого целого числа n имеем $x + y\sqrt{d} = \pm(a + b\sqrt{d})^n$. Докажите это.

$$\text{Уравнение } x^2 - dy^2 = c$$

Доказательство теоремы 12 могло показаться довольно длинным. Не вполне ясно, что проще: жонглировать неравенствами или иррациональностями. Оказывается, однако, что использованное при доказательстве теоремы 12 рассуждение позволяет выяснить, как устроены решения в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Напомним обозначения. Как и прежде, d – натуральное число, не являющееся квадратом; a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b , что $a^2 - db^2 = 1$; $q = a + b\sqrt{d}$; наконец, c – некоторое целое число, $c \neq 0$.

Пусть x и y – целые числа, $x^2 - dy^2 = c$ и $x + y\sqrt{d} > 0$. Рассмотрим числа вида q^n , где n пробегает множество всех целых чисел. Поскольку $\lim_{n \rightarrow -\infty} q^n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, то существует такое целое число n , что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \leq q^n.$$

Рассмотрим число

$$E = (x + y\sqrt{d}) : q^{n-1}.$$

Легко понять, что E представимо в виде

$$E = z + t\sqrt{d},$$

где z и t – целые числа. При этом

$$z^2 - dt^2 = c \quad (*)$$

и

$$1 < z + t\sqrt{d} \leq q. \quad (**)$$

Теорема 13. Рассмотрим всевозможные пары целых чисел $(z; t)$, удовлетворяющие условиям $(*)$ и $(**)$. Верны следующие утверждения.

1) Если множество M таких пар пусто, то уравнение $x^2 - dy^2 = c$ не имеет решений в целых числах x и y .

2) Множество M конечно.

3) Все целочисленные решения уравнения $x^2 - dy^2 = c$ можно получить из формул $x + y\sqrt{d} = \pm(z + t\sqrt{d})q^n$, где $(z; t) \in M$, а n – целое число.

Доказательство. Первое и третье утверждения оче-

видны. Докажем второе. Пусть $(z; t) \in M$. Тогда

$$z - t\sqrt{d} = \frac{c}{z + t\sqrt{d}},$$

так что

$$|z - t\sqrt{d}| < |c|$$

и, следовательно,

$$|z| = \left| \frac{(z + t\sqrt{d}) + (z - t\sqrt{d})}{2} \right| < \frac{q + |c|}{2},$$

$$|t| = \left| \frac{(z + t\sqrt{d}) - (z - t\sqrt{d})}{2} \right| < \frac{q + |c|}{2\sqrt{d}}.$$

Теорема 13 доказана.

Упражнения

45. Уравнение $x^2 - 11y^2 = 17$ не имеет решений в целых числах. Докажите это.

46. Найдите все наборы а) 11; б) 23 последовательных чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа.

47. Найдите все такие натуральные числа x , что число, получаемое зачеркиванием последней цифры числа x^2 , тоже является квадратом натурального числа. (А.Балахонкин и Ф.Кац, девятиклассники школы 131, Казань).

48. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 - 17y^2 = -16$; б) $x^2 - (n^2 + 1)y^2 = -1$, где n – натуральное число.

49. Если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в натуральных числах x и y , то выбрав из таких решений то, где x – наименьшее возможное, получим а) $q = (x + y\sqrt{d})^2$; б) $|M| = 1$. Докажите это.

50. При $a \geq 2$ уравнение $x^2 - (a^2 + 1)y^2 = -a^2$ имеет не менее трех серий решений, т.е. множество M для него состоит не менее чем из трех элементов. Докажите это.

51. Пусть p – простое число, $p \equiv 1 \pmod{4}$, a – наибольшее (существующее в силу теоремы 10) натуральное число, для которого существует такое натуральное число b , что $a^2 - pb^2 = 1$. Докажите, что а) a нечетно; б) для некоторых натуральных чисел u и v верны равенства $a \pm 1 = 2u^2$, $a \pm 1 = 2pv^2$ и $b = 2uv$; в) $u^2 - pv^2 = -1$.

52*. Решите в натуральных числах уравнение

$$\text{а) } 3^s = 2^t + 1; \quad \text{б) } x^2 + 2^y = 3^z.$$

53. Решите в целых числах уравнение

$$\text{а) } x^2 + 8xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0;$$

$$\text{б) } 3u^2 + 11uv + 9v^2 + u + v = 0.$$

(Продолжение следует)

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования

<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!

<http://vivovoco.nns.ru>

(раздел «Из номера»)

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru