Уравнения Пелля

А.СПИВАК

В прошлом номере журнала были сформулированы, но не доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* $(1;\ 0)$ *при помощи правила* $(x;\ y) \to (x + 2y;\ x + y)$.

Теорема 3. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = 7$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений* $(3;\ 1)$ *и* $(5;\ 3)$ *при помощи правила* $(x;\ y) \to (3x + 4y;\ 2x + 3y)$.

Теорема 5. *Уравнение* $x^2 - 3y^2 = 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения* $(1;\ 0)$ *при помощи правила* $(x;\ y) \to (2x + 3y;\ x + 2y)$.

Теорема 7. *Уравнение* $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения* $(0;\ 1)$ *при помощи правила* $(x;\ y) \to (x + y;\ x)$.

Можно было бы рассмотреть еще несколько примеров и сформулировать много аналогичных теорем, но пора переходить к более общим рассмотрениям.

Формула $\left(x^2 - dy^2\right)\left(z^2 - dt^2\right) = (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2$

Следующее вычисление – пожалуй, самое главное в теории уравнений Пелля:

$$\left(x^2 - dy^2\right)\left(z^2 - dt^2\right) = x^2z^2 - dy^2z^2 - dx^2t^2 + d^2y^2t^2 =$$
$$= x^2z^2 + 2xzdyt + d^2y^2t^2 -$$
$$- dy^2z^2 - 2dyzxt - dx^2t^2 = (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2.$$

А вот как можно получить ту же формулу, если разложить разность квадратов на (иррациональные!) множители и переставить их разумным образом:

$$\left(x^2 - dy^2\right)\left(z^2 - dt^2\right) =$$
$$= \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(z + t\sqrt{d}\right)\left(z - t\sqrt{d}\right) =$$
$$= \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(z + t\sqrt{d}\right)\cdot\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(z - t\sqrt{d}\right) =$$
$$= \left(xz + dyt + (xt + yz)\sqrt{d}\right)\cdot\left(xz + dyt - (xt + yz)\sqrt{d}\right) =$$
$$= (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2.$$

Честно говоря, эта выкладка даже длиннее предыдущей. Но она, надеемся, гораздо прозрачнее. Зачем нам нужна доказанная формула? Чтобы строить из одних решений другие! Точнее говоря, формула доказывает следующую важную теорему.

Теорема 8. *Если* $x^2 - dy^2 = a$ *и* $z^2 - dt^2 = b$, *то пара чисел* $(X;\ Y) = (xz + dyt;\ xt + yz)$ *удовлетворяет равенству* $X^2 - dY^2 = ab$.

И опять сформулируем и не докажем теорему о том, как устроено множество решений уравнения Пелля.

Теорема 9. *Если a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что* $a^2 - db^2 = 1$, *то уравнение* $x^2 - dy^2 = 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* $(1;\ 0)$ *при помощи правила* $(x;\ y) \to (ax + dby;\ bx + ay)$.

Упражнения

21. Уравнение а) $x^2 - 2y^2 = 14$; б) $x^2 - 2y^2 = 23^{23}$ имеет бесконечно много решений в целых числах, а уравнение в) $\left|x^2 - 2y^2 - 1004\right| = 1001$ не имеет ни одного. Докажите это.

22. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого представим в виде суммы квадратов 11 последовательных а) целых; б) натуральных чисел. в) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, квадрат каждого из которых представим в виде суммы квадратов 11 последовательных натуральных чисел.

23. Пусть a, b, x, y, z, t – рациональные числа, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2 = 0$ и хотя бы одно из чисел x, y, z и t отлично от нуля. Докажите, что существуют такие рациональные числа u, v и w, что $u^2 + av^2 + bw^2 = 0$ и $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$.

Теорема существования

Теорема 10. *Для любого натурального числа d, не являющегося квадратом, существуют такие натуральные числа x и y, что* $x^2 - dy^2 = 1$.

Вместе взятые, теоремы 8, 9 и 10 позволяют довольно ясно представить себе структуру множества решений уравнения Пелля. В одном из ближайших номеров журнала мы изложим четыре доказательства теоремы 10. А здесь у нас хватит сил только на то, чтобы доказать теоремы 2, 3, 5, 7 и 9. Впрочем, мы это сделаем двумя способами: сначала обойдемся без помощи иррациональностей, а затем при помощи иррациональностей изложим (по сути то же самое) доказательство и даже расскажем о решениях в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Упражнения

24. Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, $c \neq 0$ и уравнение $x^2 - dy^2 = c$ имеет хотя бы одно

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3.

решение в целых числах, то это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Выведите это из утверждения теоремы 10.

25. а) Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких целых a уравнение $a\left(x^2-1\right)=y^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах. б) Пусть a – целое число. Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких натуральных d уравнение $x^2-dy^2=a^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

26. Пусть n – натуральное число, $n>1$. Докажите, что уравнение а) $x^2-\left(n^2-1\right)y^2=1$; б) $x^2-\left(n^2+1\right)y^2=1$; в) $x^2-\left(n^2+2\right)y^2=1$; г) $x^2-\left(n^2-2\right)y^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

27. Докажите, что при любом натуральном a уравнение

а) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2$; б) $\left(a^2-1\right)\left(x^2-1\right)=y^2$;

в) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2+1$; г) $\left(a^2-1\right)\left(x^2-1\right)=y^2-1$;

д) $\left(a^2+1\right)\left(x^2-1\right)=y^2-1$; е) $\left(a^2-1\right)\left(x^2+1\right)=y^2-1$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

28. Докажите, что ни при каком натуральном a уравнение

а) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2-1$;

б) $x^2=(4a-1)\left(y^2+1\right)$; в) $a\left(x^2-1\right)=y^2+1$

не имеет решений в целых числах. *Указание к пунктам б) и в).* Воспользуйтесь тем, что число вида y^2+1 не может делиться на натуральное число вида $4n-1$. Доказательство последнего факта можно прочесть, например, в статье «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 год.

29. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много четверок целых чисел, в каждой из которых числа попарно различны и таковы, что $x+y+z+t=x^3+y^3+z^3+t^3=2$. б) Уравнение $xy(x+2)(y+2)=z(z+2)$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. в) Существует бесконечно много таких троек натуральных чисел, что произведение любых двух из этих чисел на единицу больше квадрата натурального числа. г) Для любого натурального числа a система уравнений

$$\begin{cases} xy-1=a^2, \\ yz-1=u^2, \\ zx-1=v^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, u и v. д) Для любого натурального числа n существует бесконечно много таких наборов из $k=3n^2-1$ последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов сама является квадратом натурального числа. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой 10.

30 * (М618). Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких натуральных n, что $n!$ делится на n^2+1. б) Для любого числа $\alpha>0$ существует бесконечно много таких натуральных n, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1.

Доказательства теорем

Теорема 2

Пусть X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2-2Y^2=\pm1$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=X, \\ x+y=Y \end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases} x=2Y-X, \\ y=X-Y. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$x^2-2y^2=(2Y-X)^2-2(X-Y)^2=$$
$$=4Y^2-4XY+X^2-2\left(X^2-2XY+Y^2\right)=-\left(X^2-2Y^2\right).$$

Понимаете, в чем идея? Каждой паре $(X;\ Y)$, являющейся решением уравнения $X^2-2Y^2=\pm1$, мы сопоставляем ее «предшественницу» – пару $(x;y)=(2Y-X;\ X-Y)$, удовлетворяющую равенству $x^2-2y^2=\mp1$.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа и $X^2-2Y^2=\pm1$, то $2Y-X$ и $X-Y$ – неотрицательные числа, причем $X-Y<Y$.*

Доказательство. Будем рассуждать «от противного». Если $2Y-X<0$, то $X>2Y$ и $X^2-2Y^2>4Y^2-2Y^2=2Y^2\ge2>1$, что противоречит равенству $X^2-2Y^2=\pm1$. Если $X-Y<0$, то $X<Y$ и $X^2-2Y^2<Y^2-2Y^2=-Y^2\le-1$. Наконец, если $X-Y\ge Y$, то $X\ge2Y$ и $X^2-2Y^2\ge4Y^2-2Y^2=2Y^2\ge2>1$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Эта лемма – основа доказательства теоремы 2. А именно, взяв любую пару $(X;\ Y)$ натуральных чисел, удовлетворяющую равенству $X^2-2Y^2=\pm1$, мы можем рассмотреть ее предшественницу – пару $(x;\ y)$. При этом $y<Y$. Если x и y – натуральные числа, то у пары $(x;\ y)$ есть своя предшественница, у той – своя, и так далее. Бесконечно этот процесс продолжаться не может: неравенство $y<Y$ гарантирует, что начатый с пары $(X;\ Y)$ процесс образования предшественниц оборвется не более чем через Y шагов. (Любитель строгости сказал бы, что здесь мы воспользовались отсутствием бесконечно убывающей последовательности натуральных чисел.)

В какой момент обрывается процесс образования пар-предшественниц? Очевидно, когда очередная пара $(x;\ y)$ состоит не только из натуральных чисел, проще говоря, когда одно из чисел x и y равно нулю. Число x равняться нулю не может, а вот равенство $x^2-2\cdot0^2=\pm1$ возможно. И возможно оно лишь при $x=1$ (напоминаем: $x\ge0$).

Итак, для любого решения $(X;\ Y)$ уравнения $X^2-2Y^2=\pm1$ процесс образования пар-предшественниц остановится, дойдя до пары $(1;\ 0)$. Проследив этот процесс в обратном направлении, т.е. не от пары $(X;\ Y)$ к паре $(1;\ 0)$, а от пары $(1;\ 0)$ к паре $(X;\ Y)$, мы видим, что он происходит по формуле $(x;y)\to(x+2y;\ x+y)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Упражнения

31. На листе клетчатой бумаги размером 32×40 клеток нарисован прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в узлах клеток. На его катетах как на гипотенузах во внешнюю сторону нарисованы равнобедренные прямоугольные треугольники. Оказалось, что разность площадей этих двух треугольников отличается от площади исходного треугольника менее чем на $1/2$. Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

32. Как известно, $1 + 2 = 3$. Легко проверить также, что $1 + 2 + 3 + \ldots + 13 + 14 = 105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$. Найдите все такие n, что сумма первых n натуральных чисел равна сумме нескольких последующих.

Теорема 3

Доказательство теоремы 3 похоже на доказательство теоремы 2. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 3x + 4y = X, \\ 2x + 3y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 3X - 4Y$ и $y = 3Y - 2X$, замечаем, что

$$x^2 - 2y^2 = (3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = X^2 - 2Y^2,$$

а затем формулируем и доказываем следующую лемму.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - 2Y^2 = 7$, и выполнено неравенство $Y \geq 6$, то $3X - 4Y$ и $3Y - 2X$ – тоже натуральные числа, причем $3X - 4Y < X$.*

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $3X - 4Y \leq 0$, то $X \leq \frac{4}{3}Y$ и $7 = X^2 - 2Y^2 \leq \frac{16}{9}Y^2 - 2Y^2 < 0$. Если $3Y - 2X \leq 0$, то $X \geq \frac{3}{2}Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq \frac{9}{4}Y^2 - 2Y^2 = \frac{Y^2}{4} > 7$. Наконец, если $3X - 4Y \geq X$, то $X \geq 2Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 > 7$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится почти так же, как и доказательство теоремы 2. Чтобы понять, где может остановиться процесс образования пар-предшественниц, достаточно разобрать случаи $Y = 1, 2, 3, 4, 5$. Сделав это, вы найдете, как и следовало ожидать, два решения: $(3; 1)$ и $(5; 3)$.

Теорема 5

Доказательство теоремы 5 похоже на доказательства теорем 2 и 3. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = X, \\ x + 2y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 2X - 3Y$ и $y = 2Y - X$, замечаем, что

$$x^2 - 3y^2 = (2X - 3Y)^2 - 3(2Y - X)^2 = X^2 - 3Y^2,$$

а затем формулируем и не доказываем (надеясь на читателя) следующую лемму.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, причем $X^2 - 3Y^2 = 1$, то $2X - 3Y$ и $2Y - X$ – неотрицательные числа, причем $2Y - X < Y$.*

Окончание доказательства – как в теореме 2.

Теорема 7

Из системы

$$\begin{cases} x + y = X, \\ x = Y \end{cases}$$

находим $x = Y$ и $y = X - Y$. Очевидно,

$$x^2 - xy - y^2 = Y^2 - Y(X - Y) - (X - Y)^2 =$$

$$= Y^2 - XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = -\left(X^2 - XY - Y^2\right).$$

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$, то $X \geq Y$, причем равенство выполнено лишь в случае $X = Y = 1$.*

Доказательство. Как всегда, рассуждаем «от противного». Если $X < Y$, то $X^2 - XY - Y^2 < -Y^2 \leq -1$, что несовместимо с условием $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$. Если же $X = Y$, то $X^2 - XY - Y^2 = -X^2$. Очевидно, $-X^2$ не равняется 1, а $-X^2 = -1$ лишь при $X = 1$. Лемма доказана. Теперь читатель, надеемся, самостоятельно завершит доказательство теоремы 7.

Упражнение 33 (М39). а) Целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m – данное натуральное число, $m > 1$) тогда и только тогда, когда x и y – соседние члены последовательности $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = m$, $a_3 = m^2 - 1$, $a_4 = m^3 - 2m$, $a_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, …, в которой $a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k$ для всех $k \geq 0$. Докажите это.
б) Рассмотрим случай $m = 3$. Очевидно, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, $a_4 = 3 \cdot 8 - 3 = 21$. Возникает гипотеза, что для любого n число a_n – это $(2n)$-й член последовательности Фибоначчи. Докажите эту гипотезу.

Теорема 9

Идея доказательства уже была применена нами четырежды. Применим же ее в пятый раз. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xz + dyt = X, \\ xt + yz = Y. \end{cases}$$

Чтобы найти x, домножим первое уравнение на z, второе – на dt и вычтем затем второе уравнение из первого:

$$zX - dtY = xz^2 - dxt^2 = x,$$

поскольку $z^2 - dt^2 = 1$. Аналогично, чтобы найти y, домножим первое уравнение на t, второе на z и вычтем второе уравнение из первого:

$$Xt - Yz = dyt^2 - yz^2,$$

откуда $y = Yz - Xt$.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - dY^2 = 1$, а z – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число t, что $z^2 - dt^2 = 1$, то $zX - dtY \geq 0$ и $Yz - Xt \geq 0$, причем $Yz - Xt < Y$.*

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $zX - dtY < 0$, то $X < \frac{dtY}{z}$ и, следовательно,

$$1 = X^2 - dY^2 < \left(\frac{dtY}{z}\right)^2 - dY^2 = dY^2 \frac{dt^2 - z^2}{z^2} < 0.$$

Если $Yz - Xt < 0$, то

$$X^2 - dY^2 > \frac{Y^2 z^2}{t^2} - dY^2 = \frac{Y^2 z^2 - dY^2 t^2}{t^2} = \frac{Y^2}{t^2} \geq 1.$$

(Последнее неравенство следует из того, что наименьшему z отвечает и наименьшее t.) Если же $Yz - Xt \geq Y$, то $X \leq (Yz - Y)/t$ и

$$X^2 - dY^2 \leq \frac{Y^2(z-1)^2}{t^2} - dY^2 =$$

$$= Y^2 \frac{z^2 - 2z + 1 - dt^2}{t^2} = Y^2 \frac{2-2z}{t^2} \leq 0 .$$

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится в точности так, как доказательство теоремы 2.

Упражнения

34*. Докажите следующие утверждения. а) Для любого простого числа p существуют такие целые числа x и y, что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod p$. б) Если p – нечетное простое число, n – натуральное, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на p^n, то существуют такие целые числа z и t, что $\left(x + p^n z\right)^2 - 34\left(y + p^n t\right)^2 + 1$ делится на p^{n+1}. в) Если $n > 2$ – натуральное число, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}, то число $\left(x + 2^{n-1}\right)^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^{n+1}. г) Если m_1 и m_2 – взаимно простые натуральные числа, для которых существуют такие целые числа x_1, y_1, x_2 и y_2, что $x_1^2 - 34y_1^2 \equiv -1 \pmod{m_1}$ и $x_2^2 - 34y_2^2 \equiv -1 \pmod{m_2}$, то существуют такие целые числа x и y, что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m_1 m_2}$. д) Для любого натурального m сравнение $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod m$ имеет решения в целых числах x и y. е) Уравнение $x^2 - 34y^2 = -1$ не имеет решений в целых числах.

Замечание. Ситуация, когда сравнения имеют решения, а уравнение не имеет, не столь уж редка. Например, для любого натурального числа m сравнение $(3x+1)(2x+1) \equiv 0 \pmod m$ имеет решения в целых числах, а уравнение $(3x+1)(2x+1) = 0$ не имеет целых решений. Тем интереснее знать, что 34 – наименьшее натуральное число d, для которого все сравнения вида $x^2 - dy^2 \equiv -1 \pmod m$ имеют решения, а уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ целочисленных решений не имеет. (Проверьте это!)

35. Докажите следующие утверждения. а) Если a, b – такие натуральные числа, что $\left(\sqrt3 + \sqrt2\right)^{2001} = a\sqrt3 + b\sqrt2$, то $3a^2 - 2b^2 = 1$. б) Если a и b – такие натуральные числа, что $3a^2 - 2b^2 = 1$, то для некоторого нечетного натурального числа n имеем $a\sqrt3 + b\sqrt2 = \left(\sqrt3 + \sqrt2\right)^n$.

36. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b, что $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a. б) Если $x < y$ – натуральные числа и $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$, то $x = \varphi_{2n-1}$ и $y = \varphi_{2n+1}$, где n – некоторое натуральное число. в) Если a, b и $c = \dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ – натуральные числа, то $c = 3$. г) Если два натуральных числа таковы, что увеличенный на единицу квадрат любого из них делится на другое, то произведение этих чисел на единицу больше квадрата их разности. д) Уравнение $x^2 - \left(n^2 - 4\right)y^2 = -4$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это. е) Уравнение $x^2 - \left(n^2 - 4\right)y^2 = -1$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это.

Указание. Воспользуйтесь утверждениями теоремы 10 и предыдущим пунктом.

37 (М1225). Докажите, что а*) если для натуральных чисел a и b число $\left(a^2 + b^2\right)/(ab-1)$ натуральное, то оно равно 5; б) уравнение $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

38. Для любого натурального n число $\left[\left(3 + \sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}. Докажите это.

39. Для любого (не)четного натурального n число

$$\left[\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^n\right] - 1 = \left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^n - 2$$

является (упятеренным) квадратом натурального числа. Докажите это.

40. а) Существуют такие иррациональные числа $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, что ни при каких натуральных m и n целые части чисел α^m и β^n не совпадают. Докажите это. б) Придумайте такую последовательность иррациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, что равенство $\left[\alpha_r^m\right] = \left[\alpha_s^n\right]$, где r, s, m и n – натуральные числа, верно лишь при $r = s$ и $m = n$.

Уравнение $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$

Разберем еще один пример. Он, возможно, покажется вам слишком специальным. Но, в конце концов, если уравнение $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ никак не заинтересовало вас и вы уверены, что оно не заинтересует вас никогда, то перейдите сразу к следующему разделу статьи.

К уравнению $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ можно прийти, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, **1001**, **2002**, **3003**, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

Коротко расскажем о числах сочетаний C_n^m тем, кто с ними еще не знаком. В n-й строке треугольника Паскаля на m-м месте стоит число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

причем нумерация чисел в каждой строке, как и нумерация самих строк, начинается с нуля. Основное правило образования треугольника Паскаля таково: *сумма любых двух соседних чисел некоторой строки равна числу следующей строки, которое расположено «ниже них и между ними»*; другими словами, для любых натуральных чисел m и m, где $m \leq n$, верно равенство

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m .$$

Очевидно, 1001 + 2002 = 3003. Это означает, что $C_{14}^4 + C_{14}^5 = C_{14}^6$. Последнее равенство можно записать в виде

$$C_{15}^5 = C_{14}^6 .$$

И вообще, любое равенство вида $C_n^{m-2} + C_n^{m-1} = C_n^m$ можно записать в виде $C_{n+1}^{m-1} = C_n^m$.

Теорема 11. *Равенство $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = \varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и $y = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$, где k – некоторое натуральное число.*

Мы докажем это довольно неожиданное утверждение двумя способами. Первый заимствован из статьи А.Ширшова «Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$» («Квант» № 4 за 1977 год). Прежде всего выразим числа сочетаний через факториалы:

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}=\frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!}.$$

После очевидных преобразований получаем

$$xy=(x-y+1)(x-y).$$

Теперь применим некоторый специальный трюк. Обозначим буквой d наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x = ad$ и $y = bd$, где a и b взаимно просты. Подставив выражения для x и y в уравнение, после сокращения на d получим равенство

$$abd=(ad-bd+1)(a-b).$$

Поскольку числа $a-b$ и ab взаимно просты и поскольку числа d и $ad - bd + 1$ тоже взаимно просты, то

$$\begin{cases}ab=ad-bd+1,\\ d=a-b,\end{cases}\quad \text{т.е.}\quad \begin{cases}a=b+d,\\ (b+d)b=(b+d)d-bd+1.\end{cases}$$

Последнее уравнение после упрощений приобретает вид

$$b^2+bd-d^2=1.$$

Его решения в натуральных числах нам известны из предыдущего номера журнала: $b=\varphi_{2k-1}$ и $d=\varphi_{2k}$, где k – натуральное число. Таким образом,

$$\begin{cases}x=ad=(\varphi_{2k-1}+\varphi_{2k})\varphi_{2k}=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1},\\ y=bd=\varphi_{2k-1}\varphi_{2k},\end{cases}$$

как и было обещано. Например, при $k = 1, 2, 3$ имеем, соответственно, $(x; y) = (2; 1), (15; 6), (104; 40)$.

Замечание. Строго говоря, надо бы проверить, что всякая пара чисел $(x;y)=(\varphi_{2k}\varphi_{2k+1};\varphi_{2k-1}\varphi_{2k})$ удовлетворяет равенству $(x-y+1)(x-y)=xy$. Немного подумав, можно понять, что это очевидно: двигаться «снизу вверх» по только что изложенному решению даже легче, чем «сверху вниз». Впрочем, можно обойтись и без использования интеллекта:

$$x-y=\varphi_{2k+1}\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}=(\varphi_{2k+1}-\varphi_{2k-1})\varphi_{2k}=\varphi_{2k}^2$$

и

$$x-y+1=\varphi_{2k}^2+1,$$

так что

$$(x-y+1)(x-y)=(\varphi_{2k}^2+1)\varphi_{2k}^2=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}=xy.$$

(Мы воспользовались тождеством $\varphi_{2k}^2+1=\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}$, которое является частным случаем тождества упражнения 20,а.)

Мы решили уравнение

$$(x-y+1)(x-y)=xy,$$

применив довольно неожиданный трюк. Но есть и другой – стандартный – способ. А именно, есть стандартная схема, по которой решают в целых числах уравнения второй степени. Давайте посмотрим, как эта схема работает. Первым делом раскроем скобки и приведем подобные:

$$x^2-3xy+y^2+x-y=0.$$

Теперь освободимся от членов первой степени. Для этого выполним замену $x = X + a$, $y = Y + b$, получив уравнение

$$X^2+2aX+a^2-3XY-3aY-3bX-3ab+Y^2+$$
$$+2bY+b^2+X+a-Y-b=0,$$

и приравняем коэффициенты при X и Y к нулю:

$$\begin{cases}2a-3b+1=0,\\ -3a+2b-1=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим $a = -1/5$ и $b = 1/5$. При этих значениях a и b уравнение принимает вид

$$X^2-3XY+Y^2=\frac{1}{5},$$

где $X=x+\frac{1}{5}$ и $Y=y-\frac{1}{5}$. Домножив обе части уравнения на 20, получаем

$$20X^2-60XY+20Y^2=4,$$
$$5(4X^2-12XY+9Y^2)-25Y^2=4,$$
$$(5Y)^2-5(2X-3Y)^2=-4,$$
$$z^2-5t^2=-4,$$

где $z = 5Y = 5y - 1$ и $t = 2X - 3Y = 2x - 3y + 1$.

Пора воспользоваться следствием из теоремы 7. А именно, *все решения уравнения* $z^2-5t^2=\pm 4$ *в натуральных числах даются формулой* $(z;t)=(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1};\varphi_n)$. При этом знаку «+» соответствуют четные n, а знаку «–» – нечетные. Осталось понять, при каких нечетных n число $z=\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}$ дает остаток 4 при делении на 5. Выпишем остатки от деления нескольких первых чисел Фибоначчи на 5:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$\varphi_n \bmod 5$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2
$\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1} \bmod 5$	1	3	**4**	2	1	3	**4**	2	1	3	**4**	2	1	

Закономерность очевидна: $n\equiv 3 \pmod 4$.

Итак, $y=\frac{z+1}{5}=\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}+1}{5}$ и

$$x=\frac{t+3y-1}{2}=\frac{\varphi_n+3\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}+1}{5}-1}{2}=$$
$$=\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_{n+3}-1}{5},$$

где $n\equiv 3 \pmod 4$. Обозначив $n = 4k - 1$, запишем эти формулы в виде $x=\frac{\varphi_{4k}+\varphi_{4k+2}-1}{5}=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и

$y=\dfrac{\varphi_{4k-2}+\varphi_{4k}+1}{5}=\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$ (мы воспользовались тождеством $\varphi_{2m}+\varphi_{2m+2}-(-1)^m=5\varphi_m\varphi_{m+1}$ – см. упражнение 42). Теорема 11 доказана.

Упражнения

41. Докажите, что если x, y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $x^2-3xy+y^2+x-y=0$ и неравенству $x\ge y$, то $2x\ge 3y$.

42. Докажите

а) сравнение $\varphi_{n+3}+\varphi_{n+5}\equiv\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}\pmod 5$;

б) тождества $\varphi_{2m}=\varphi_{m+1}^2-\varphi_{m-1}^2$ и $\varphi_{2m+1}=\varphi_m^2+\varphi_{m+1}^2$;

в) тождество $\varphi_{2m}+\varphi_{2m+2}=5\varphi_m\varphi_{m+1}+(-1)^m$.

43 (М905). Уравнение $4x^n+(x+1)^2=y^2$ относительно натуральных чисел x и y а) имеет бесконечно много решений при $n=2$; б) не имеет решений, если $n\ne 2$ и n – натуральное число. Докажите это.

Использование иррациональностей

Неравенства, неравенства, неравенства... Есть ощущение какого-то фокуса, когда все сходится, но причина удачи спрятана и не видна наивному зрителю. Сейчас мы докажем теорему 9 заново. Надеемся, этим мы поможем вам вполне уяснить доказательство этой теоремы.

Лемма 1. *Если $x^2-dy^2>0$ и $x+y\sqrt{d}>0$, то $x>0$.*

Доказательство.

$$2x=x+y\sqrt{d}+\frac{x^2-dy^2}{x+y\sqrt{d}}>0.$$

Есть и другой способ – «от противного». Предположим, что $x\le 0$. Тогда обе части неравенства $y\sqrt{d}>-x$ можно возвести в квадрат:

$$dy^2>x^2,$$

что противоречит неравенству $x^2-dy^2>0$.

Лемма 2. *Если $x^2-dy^2=1$ и $x+y\sqrt{d}>1$, то $y>0$.*

Доказательство. Пусть $y\le 0$. Тогда

$$x-y\sqrt{d}\ge x+y\sqrt{d}>1.$$

Произведение чисел $x-y\sqrt{d}$ и $x+y\sqrt{d}$, каждое из которых больше 1, не может равняться 1.

Лемма 3. *Если $a^2-db^2=x^2-dy^2$ и $x+y\sqrt{d}<a+b\sqrt{d}$, причем числа a, b, x и y неотрицательные, то $x<a$ и $y<b$.*

Доказательство.

$$a-b\sqrt{d}=\frac{a^2-db^2}{a+b\sqrt{d}}<\frac{x^2-dy^2}{x+y\sqrt{d}}=x-y\sqrt{d}.$$

Сложив неравенства

$$-x+y\sqrt{d}<-a+b\sqrt{d}$$

и

$$x+y\sqrt{d}<a+b\sqrt{d},$$

получаем $2y\sqrt{d}<2b\sqrt{d}$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 4. *Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2-db^2=1$. Если x, y – целые числа и $1<x+y\sqrt{d}<a+b\sqrt{d}$, то $x^2-dy^2\ne 1$.*

Доказательство. Предположим противное: $x^2-dy^2=1$. Тогда в силу лемм 1 и 2 числа x и y положительны. В силу леммы 3 имеем $x<a$. Получили противоречие.

Следующая теорема – это другая формулировка теоремы 9.

Теорема 12. *Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2-db^2=1$. Если x, y – целые числа, $x^2-dy^2=1$ и $x+y\sqrt{d}>0$, то для некоторого целого числа n верно равенство $x+y\sqrt{d}=\left(a+b\sqrt{d}\right)^n$.*

Доказательство. Обозначим $q=a+b\sqrt{d}$. Поскольку числа a и b натуральные, то $q>1$. Рассмотрим возрастающую геометрическую прогрессию:

$$1<q<q^2<q^3<q^4<q^5<\ldots$$

Она стремится к бесконечности. А убывающая геометрическая прогрессия

$$1>\frac{1}{q}>\frac{1}{q^2}>\frac{1}{q^3}>\frac{1}{q^4}>\frac{1}{q^5}>\ldots$$

стремится к нулю. Поэтому существует такое целое n, что

$$q^{n-1}<x+y\sqrt{d}\le q^n.$$

Рассмотрим число

$$E=\left(x+y\sqrt{d}\right):q^{n-1}.$$

Очевидно, $1<E\le q$. Поскольку

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{a+b\sqrt{d}}=\frac{a-b\sqrt{d}}{\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)}=\frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-db^2}=a-b\sqrt{d},$$

то

$$E=\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(a-b\sqrt{d}\right)^{n-1}.$$

Воспользовавшись формулой

$$\left(r+s\sqrt{d}\right)\left(u+v\sqrt{d}\right)=(ru+dsv)+(rv+su)\sqrt{d},$$

мы заключаем, что число E представимо в виде $E=z+t\sqrt{d}$, где z, t – целые числа. Переходя к сопряженным числам, получаем

$$z-t\sqrt{d}=\left(x-y\sqrt{d}\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)^{n-1}.$$

Следовательно,

$$z^2-dt^2=\left(z+t\sqrt{d}\right)\left(z-t\sqrt{d}\right)=$$

$$=\left(x+y\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right)\left(a-b\sqrt{d}\right)^{n-1}\left(a+b\sqrt{d}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(x^2-dy^2\right)\left(a^2-db^2\right)^{n-1}=1.$$

Итак, числа z и t целые, $1 < z + t\sqrt{d} \le a + b\sqrt{d}$ и $z^2 - dt^2 = 1$. В силу леммы 4 это возможно лишь в случае равенства $z + t\sqrt{d} = a + b\sqrt{d}$, т.е. в случае

$$x + y\sqrt{d} = q^n ,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 44. Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $x^2 - dy^2 = 1$, то для некоторого целого числа n имеем $x + y\sqrt{d} = \pm\left(a + b\sqrt{d}\right)^n$. Докажите это.

Уравнение $x^2 - dy^2 = c$

Доказательство теоремы 12 могло показаться довольно длинным. Не вполне ясно, что проще: жонглировать неравенствами или иррациональностями. Оказывается, однако, что использованное при доказательстве теоремы 12 рассуждение позволяет выяснить, как устроены решения в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Напомним обозначения. Как и прежде, d – натуральное число, не являющееся квадратом; a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$; $q = a + b\sqrt{d}$; наконец, c – некоторое целое число, $c \ne 0$.

Пусть x и y – целые числа, $x^2 - dy^2 = c$ и $x + y\sqrt{d} > 0$. Рассмотрим числа вида q^n, где n пробегает множество всех целых чисел. Поскольку $\lim\limits_{n\to-\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, то существует такое целое число n, что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \le q^n .$$

Рассмотрим число

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right) : q^{n-1} .$$

Легко понять, что E представимо в виде

$$E = z + t\sqrt{d} ,$$

где z и t – целые числа. При этом

$$z^2 - dt^2 = c \qquad (*)$$

и

$$1 < z + t\sqrt{d} \le q . \qquad (**)$$

Теорема 13. *Рассмотрим всевозможные пары целых чисел $(z; t)$, удовлетворяющие условиям $(*)$ и $(**)$. Верны следующие утверждения.*

1) Если множество M таких пар пусто, то уравнение $x^2 - dy^2 = c$ не имеет решений в целых числах x и y.

2) Множество M конечно.

3) Все целочисленные решения уравнения $x^2 - dy^2 = c$ можно получить из формул $x + y\sqrt{d} = \pm\left(z + t\sqrt{d}\right)q^n$, где $(z; t) \in M$, а n – целое число.

Доказательство. Первое и третье утверждения очевидны. Докажем второе. Пусть $(z; t) \in M$. Тогда

$$z - t\sqrt{d} = \frac{c}{z + t\sqrt{d}} ,$$

так что

$$\left|z - t\sqrt{d}\right| < |c|$$

и, следовательно,

$$|z| = \left|\frac{\left(z + t\sqrt{d}\right) + \left(z - t\sqrt{d}\right)}{2}\right| < \frac{q + |c|}{2} ,$$

$$|t| = \left|\frac{\left(z + t\sqrt{d}\right) - \left(z - t\sqrt{d}\right)}{2}\right| < \frac{q + |c|}{2\sqrt{d}} .$$

Теорема 13 доказана.

Упражнения

45. Уравнение $x^2 - 11y^2 = 17$ не имеет решений в целых числа. Докажите это.

46. Найдите все наборы а) 11; б) 23 последовательных чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа.

47. Найдите все такие натуральные числа x, что число, получаемое зачеркиванием последней цифры числа x^2, тоже является квадратом натурального числа. (А.Балахонкин и Ф.Кац, девятиклассники школы 131, Казань).

48. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 - 17y^2 = -16$; б) $x^2 - \left(n^2 + 1\right)y = -1$, где n – натуральное число.

49. Если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в натуральных числах x и y, то выбрав из таких решений то, где x – наименьшее возможное, получим а) $q = \left(x + y\sqrt{d}\right)^2$; б) $|M| = 1$. Докажите это.

50. При $a \ge 2$ уравнение $x^2 - \left(a^2 + 1\right)y^2 = -a^2$ имеет не менее трех серий решений, т.е. множество M для него состоит не менее чем из трех элементов. Докажите это.

51. Пусть p – простое число, $p \equiv 1 \pmod 4$, a – наибольшее (существующее в силу теоремы 10) натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - pb^2 = 1$. Докажите, что а) a нечетно; б) для некоторых натуральных чисел u и v верны равенства $a \pm 1 = 2u^2$, $a \pm 1 = 2pv^2$ и $b = 2uv$; в) $u^2 - pv^2 = -1$.

52*. Решите в натуральных числах уравнение

а) $3^s = 2^r + 1$; б) $x^2 + 2^y = 3^z$.

53. Решите в целых числах уравнение

а) $x^2 + 8xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$;

б) $3u^2 + 11uv + 9v^2 + u + v = 0$.

(Продолжение следует)