

Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды

Э.ГОТМАН

В УЧЕБНЫХ ПОСОБИЯХ ПО ГЕОМЕТРИИ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮТСЯ задачи о сфере, описанной около правильной пирамиды, а также о сфере, вписанной в пирамиду (сфере, касающейся всех граней пирамиды), и гораздо реже – задачи, в которых фигурирует сфера, касающаяся всех ребер пирамиды. Между тем, задачи такого рода предлагаются на вступительных экзаменах в некоторые высшие учебные заведения. Для их решения требуется хорошее пространственное воображение, умение выполнить правильный и наглядный чертеж, знание планиметрии и тригонометрии. Старшеклассникам полезно познакомиться с приемами решения таких задач.

В предлагаемой статье рассматривается сфера, касающаяся

ся всех ребер правильной пирамиды. Всегда ли существует такая сфера?

Прежде всего ответим на этот вопрос. Напомним некоторые сведения, которые потребуются нам в дальнейшем.

Как известно, плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания (рис.1). Любая прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания A , называется касательной к сфере. Говорят также, что сфера касается прямой в точке A .

Для прямой, касательной к сфере, имеет место теорема, аналогичная теореме о касательной прямой к окружности.

Теорема 1. Если прямая касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Обратное, если прямая проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к сфере.

Рассмотрим в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся сторон данного треугольника. Прежде всего заметим, что центр O вписанной в треугольник ABC окружности является центром одной такой сфе-

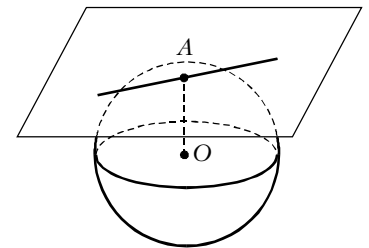


Рис. 1

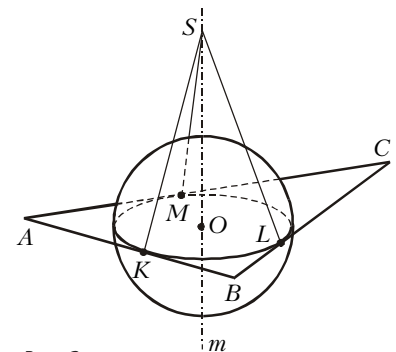


Рис. 2

ры (рис.2). Если K, L, M – точки касания окружности со сторонами AB, BC и CA соответственно, то сфера с центром O и радиусом OK касается всех сторон треугольника ABC . Теперь нетрудно догадаться, что искомое множество точек есть перпендикуляр к плоскости треугольника ABC , проходящий через точку O . Действительно, если S – точка, принадлежащая перпендикуляру m , то $SK = SL = SM$ как наклонные, имеющие на плоскости ABC равные проекции. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AB, SL \perp BC, SM \perp CA$. Значит, согласно теореме 1, сфера с центром O и радиусом SK касается всех сторон треугольника ABC . Если же некоторая точка Q не лежит на перпендикуляре m к плоскости ABC , то не все расстояния от точки Q до сторон AB, BC, CA равны (в силу теоремы о наклонных и их проекциях на плоскость), и потому точка Q не является центром сферы, касающейся всех сторон треугольника ABC .

Аналогично доказывается, что в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся всех сторон правильного многоугольника, также есть перпендикуляр к плоскости многоугольника, проходящий через его центр. Теперь дадим ответ на поставленный вопрос.

Теорема 2. Для всякой правильной пирамиды всегда существует сфера, касающаяся всех ее ребер.

Доказательство. Пусть $NA_1 \dots A_n$ – правильная n -угольная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема, P – центр окружности, вписанной в грань NA_1A_2 (на

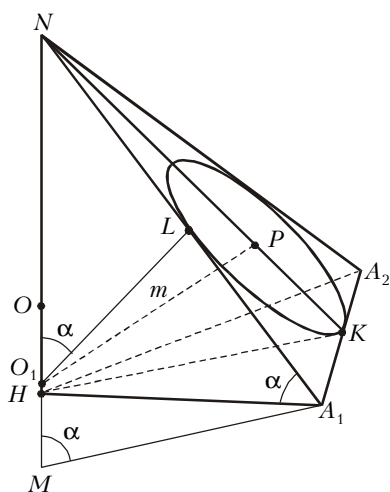


Рис. 3

рисунке 3 изображена лишь n -я часть пирамиды). Центр сферы, касающейся всех сторон правильного многоугольника $A_1 \dots A_n$, лежит на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H . Множество центров сфер, касающихся сторон треугольника NA_1A_2 , есть перпендикуляр m к плоскости NA_1A_2 , проходящий через точку P . Прямые m и NH лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1 . Это следует из того, что $A_1A_2 \perp NH, A_1A_2 \perp NK$, и, значит, по теореме о двух перпендикулярах, A_1A_2 – перпендикуляр к плоскости NKH . Поэтому плоскости NHK и NA_1A_2 перпендикулярны. Следовательно, прямая m лежит в плоскости NHK и пересекает прямую NH , поскольку угол NKH острый.

Отсюда следует, что точка O_1 есть центр сферы, касающейся сторон основания пирамиды и боковых ребер NA_1 и NA_2 . Радиус ее равен O_1K . Эта сфера касается и всех других ребер пирамиды, так как расстояния от точки O_1 до боковых ребер равны между собой.

Таким образом, всегда существует сфера, касающаяся всех ребер правильной пирамиды. При этом каждая грань пересекает сферу по окружности, вписанной в грань, а точки касания окружности с ребрами являются в то же время точками касания сферы и ребер. Центр сферы лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении. Отрезок, соединяющий центр O_1 сферы с точкой касания L ребра пирамиды и окружности, вписанной в грань, перпендикулярен ребру и равен радиусу сферы.

Рассмотрим несколько задач о сфере, касающейся всех ребер правильной пирамиды.

Задача 1. Боковое ребро правильной n -угольной пирамиды равно b , угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Решение. Воспользуемся прежними обозначениями и рисунком 3. Так как $A_1A_2 \dots A_n$ – правильный многоугольник, то, полагая $A_1A_2 = a$, имеем $A_1L = A_1K = \frac{1}{2}a, LN = b - \frac{1}{2}a$ (отрезки A_1L и A_1K равны, как отрезки касательных к окружности, вписанной в грань NA_1A_2). Прямоугольные треугольники HA_1N и LO_1N имеют общий угол N , и потому $\angle LO_1N = \angle HA_1N = \alpha$. Обозначив радиус искомой сферы через R_1 , находим

$$R_1 = LN \operatorname{ctg} \alpha = \left(b - \frac{1}{2}a \right) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$a = 2HA_1 \sin \frac{\pi}{n} = 2b \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$R_1 = b \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right). \quad (1)$$

В приведенном примере данные элементы b и α принадлежали одному прямоугольному треугольнику. Поэтому имелась возможность вычислять промежуточные неизвестные величины одну за другой. В более сложных случаях приходится прибегать к введению вспомогательных неизвестных.

Пользуясь формулой (1), легко получить другие формулы для вычисления радиуса R_1 сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Продолжим высоту NH пирамиды за точку H до пересечения с описанной около пирамиды сферой в точке M (см. рис.3). Тогда MN – диаметр сферы, а также диаметр окружности, описанной около треугольника A_1MN . Поэтому $\angle MA_1N = 90^\circ, A_1H \perp MN, \angle NMA_1 = \angle NA_1H = \alpha$. Если R – радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, то $MN = 2R$. Из треугольника A_1MN следует, что $b = 2R \sin \alpha$, и поэтому

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right). \quad (2)$$

Обозначим высоту NH пирамиды через h . Из треугольника NA_1H имеем $b = \frac{h}{\sin \alpha}$. Следовательно,

$$R_1 = \frac{h \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right)}{\sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

Центр сферы, вписанной в пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды. Центр же описанной сферы может лежать как на высоте, так и на продолжении высоты вне пирамиды. Пользуясь рисунком 3, легко сравнить отрезки NH и MH . Если $\alpha = 45^\circ$, то центр O описанной сферы совпадает с центром основания H . При $\alpha > 45^\circ$ центр O лежит на высоте пирамиды, так как $NH > MH$, а при $\alpha < 45^\circ$ – на продолжении высоты NH за точку H ($NH < MH$).

Выясним, где расположен центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Задача 2. Высота правильной n -угольной пирамиды равна h , угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α . На каком расстоянии от плоскости основания находится центр O_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды?

Решение. Воспользуемся формулой (3):

$$R_1 = \frac{h \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right)}{\sin^2 \alpha}.$$

Далее находим

$$NO_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha}.$$

Таким образом,

$$NO_1 - h = \frac{h \cos \alpha \left(\cos \alpha - \sin \frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2 \alpha}, \text{ где } 0 < \alpha < \frac{\pi}{n}.$$

Отсюда следует, что точки O_1 и H совпадают тогда и только тогда, когда $\cos \alpha = \sin \frac{\pi}{n}$, или $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. Точка O_1 лежит на высоте пирамиды, если $NO_1 < NH$, или

$$\cos \alpha < \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right), \text{ откуда } \alpha > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Наконец, если $\alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, то точка O_1 лежит на продолжении высоты пирамиды NH , т.е. вне пирамиды.

В частности, для правильной треугольной пирамиды получаем $\alpha = \frac{\pi}{6}$, для четырехугольной пирамиды $\alpha = \frac{\pi}{4}$, для шестиугольной $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Элементарно-геометрическим способом нетрудно доказать, что в правильной n -угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают тогда и только тогда, когда плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна π . Могут ли в правильной n -угольной пирамиде совпадать центр описанной сферы и центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды? Решив следующую задачу, получим ответ на этот вопрос.

Задача 3. Докажите, что расстояние d между центром O сферы, описанной около правильной n -угольной пирамиды, и центром O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, может быть выражено формулами

$$a) \ d = \frac{|a - b|}{2 \sin \alpha}, \quad б) \ d = b \frac{|1 - 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha|}{2 \sin \alpha},$$

где a и b — длины сторон основания и бокового ребра пирамиды, α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Расстояние между центрами сфер равно $|NO_1 - NO|$. Из треугольника NO_1L (см. рис.3) находим

$$NL = b - \frac{a}{2}, \quad NO_1 = \frac{2b - a}{2 \sin \alpha}.$$

Из треугольника MNA_1 имеем

$$MN = 2R = \frac{b}{\sin \alpha}, \text{ откуда } R = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

Следовательно,

$$NO_1 - NO = NO_1 - R = \frac{b - a}{2 \sin \alpha},$$

или

$$d = \frac{|a - b|}{2 \sin \alpha}.$$

Чтобы вывести формулу б), найдем зависимость между величинами a и b . Имеем: $HA_1 = b \cos \alpha$, $a = 2HA_1 \sin \frac{\pi}{n}$. Значит, $a = 2b \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha$. Подставив значение a в предыдущую формулу, получим

$$d = \frac{b \left|1 - 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right|}{2 \sin \alpha}.$$

Из формулы а) следует, что центры O и O_1 совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$, т.е. когда все боковые грани пирамиды — равносторонние треугольники, что возможно лишь при $n < 6$.

Из формулы б) следует, что $d = 0$ лишь при условии

$$2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1, \text{ или } \cos \alpha = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Так как $\cos \alpha < 1$, то это возможно лишь при $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$.

Заметим, что если $n = 4$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$. При этом точки O , O_1 и H совпадают.

Итак, центры O и O_1 могут совпадать только тогда, когда правильная пирамида треугольная, четырехугольная или пятиугольная.

Задача 4. Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде расстояние d между центрами сфер, описанной около пирамиды и касающейся всех ее ребер, выражается формулой

$$d = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Пусть NH — высота правильной шестиугольной пирамиды, O — центр описанной около нее сферы, O_1 —

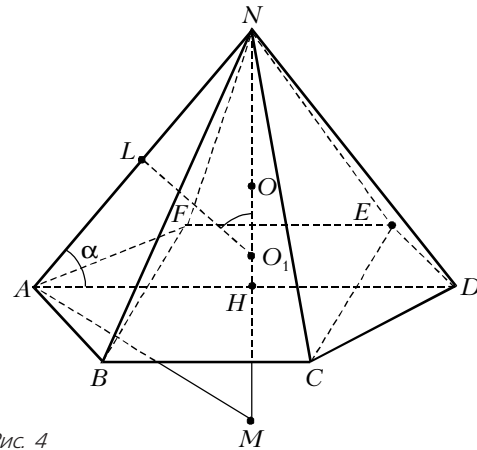


Рис. 4

центр сферы, касающейся всех ее ребер (рис.4). Воспользуемся результатом задачи 3 и получим

$$NO_1 - NO = \frac{b \left(1 - 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha\right)}{2 \sin \alpha} = \frac{b(1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Так как $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $NO_1 - NO > 0$. Это значит, что центр описанной сферы при любом значении α лежит между вершиной пирамиды и центром сферы, касающейся всех ее ребер.

Задача 5. Радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, равен R . Радиус сферы, касающейся всех ее ребер, равен R_1 . Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, и расстояния от вершины пирамиды

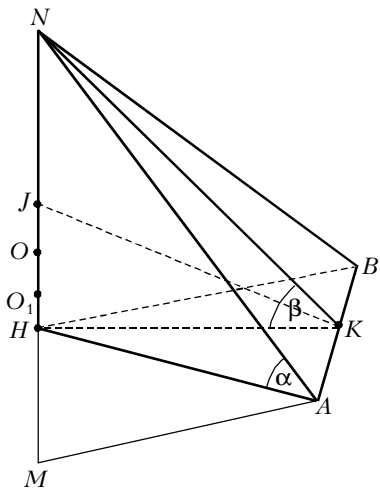


Рис. 5

до центров этих сфер, если $R = 4$ и $R_1 = 3$.

Решение. Проведем высоту NH данной шестиугольной пирамиды (рис. 4 и 5). Тогда $\angle HKN$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды. Центр J вписанной сферы лежит на высоте пирамиды и на биссектрисе угла HKN .

Введем обозначения: $JH = r$ (радиус вписанной сферы), $NH = h$, $\angle HKN = \beta$, $\angle NAH = \alpha$. По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем

$$\frac{HJ}{JN} = \frac{HK}{KN},$$

или

$$\frac{r}{h-r} = \cos \beta,$$

откуда

$$r = \frac{h \cos \beta}{1 + \cos \beta}. \quad (4)$$

Вычислим неизвестные h и $\cos \beta$. Сначала найдем угол α . Воспользовавшись формулой (2), получим уравнение

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \cos \alpha\right),$$

или

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + \frac{R_1}{R} = 0,$$

откуда $\cos \alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{R_1}{R}}$ (второй корень уравнения не подходит, так как $\cos \alpha < 1$).

При $R = 4$ и $R_1 = 3$ имеем

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$

Далее из треугольников AMN и AHN находим

$$h = 2R \sin^2 \alpha, \quad h = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6.$$

Остается найти связь между углами α и β . Из треугольников ANH и KNH имеем $AH = h \operatorname{ctg} \alpha$, $KH = h \operatorname{ctg} \beta$. А так как $KH = AH \sin 60^\circ$, то

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \alpha,$$

и легко находим, что $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2}$ и $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставив значения h и $\cos \beta$ в формулу (4), получим

$$r = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2} \approx 1,8.$$

Расстояние от вершины N пирамиды до центра O сферы, описанной около пирамиды, равно R , а расстояние от вершины N до центра O_1 сферы, касающейся всех ребер, равно $\frac{R}{\cos \alpha}$. Следовательно, если $R = 4$ и $R_1 = 3$, то $NO = 4$, $NJ \approx 6 - 1,8 = 4,2$ и $NO_1 = 6$ (т.е. центр O_1 совпадает с центром основания H).

Предлагаем читателю самостоятельно доказать истинность следующих соотношений между основными углами в правильной n -угольной пирамиде:

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha = \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \beta,$$

$$\text{б) } \cos \alpha = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \text{в) } \cos \beta = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2},$$

где γ – величина плоского угла при вершине пирамиды, α и β – величины тех же углов, что и в задаче 5.

Формулы а), б) и в) находят применение при решении предлагаемых ниже задач.

Следующая задача по содержанию близка предыдущей. Сохраняя прежние обозначения, при решении ее воспользуемся уже известными формулами.

Задача 6. Дана правильная треугольная пирамида, r и R – радиусы вписанной и описанной сфер. Найдите высоту h пирамиды и радиус R_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды, если $r = 1$ и $R = 3,5$.

Решение. Воспользуемся формулами

$$h = 2R \sin^2 \alpha \quad \text{и} \quad h = \frac{r(1 + \cos \beta)}{\cos \beta}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{2R}{r} \sin^2 \alpha = \frac{1 + \cos \beta}{\cos \beta}. \quad (5)$$

В правильной треугольной пирамиде углы α и β связаны:

$\operatorname{ctg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} \beta$. В силу тождества $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ имеем

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\sin^2 \beta} - 3, \quad \text{откуда} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \beta}{1 + 3 \cos^2 \beta}.$$

Подставив значение $\sin^2 \alpha$ в равенство (5), получим уравнение

$$(2R + 3r) \cos^2 \beta - 2R \cos \beta + r = 0,$$

которое при $\frac{R}{r} \geq 3$ имеет два корня:

$$\cos \beta = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr - 3r^2}}{2R + 3r}$$

(если $\frac{R}{r} = 3$, то корни равны: $\cos \beta = \frac{1}{3}$).

При $r = 1$ и $R = 3,5$ уравнение принимает вид

$$10 \cos^2 \beta - 7 \cos \beta + 1 = 0,$$

откуда $\cos \beta = \frac{1}{2}$ или $\cos \beta = \frac{1}{5}$.

Если $\cos \beta = \frac{1}{2}$, то $\beta = 60^\circ$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{7}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Получим

$$h = 2R \sin^2 \alpha, \quad h = 7;$$

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha\right), \quad R_1 = 2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \approx 2.$$

Если $\cos \beta = \frac{1}{5}$, то $\sin^2 \alpha = \frac{6}{7}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 6, \quad R_1 = \sqrt{7} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1,8.$$

Продолжим исследование свойств сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Для этого предварительно решим следующую задачу.

Задача 7. Пусть R и r – радиусы сфер, описанной около правильной n -угольной пирамиды и вписанной в нее, d – расстояние между их центрами. Докажите, что

$$а) d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}, \quad б) \frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

Решение. Воспользуемся теми же обозначениями и формулами, что и при решении предыдущих задач. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} h = 2R \sin^2 \alpha, \\ h = r \left(1 + \frac{1}{\cos \beta} \right), \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства и получим

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right).$$

Из первых двух уравнений находим

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{2R}{2R - h}, \quad \frac{1}{\cos \beta} = \frac{h - r}{r}.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем квадратное уравнение относительно h :

$$h^2 - 2(R + r)h + 4Rr + \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 0, \quad (6)$$

откуда

$$h = R + r + \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

А так как расстояние d между центрами описанной и вписанной сфер равно $|NJ - NO| = |h - r - R|$, то

$$d = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}},$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Дискриминант уравнения (6) неотрицателен, следовательно,

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $d = 0$, т.е. центры сфер совпадают.

Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить аналогичное неравенство для радиуса описанной сферы и радиуса сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды?

Задача 8. Пусть R – радиус сферы, описанной около правильной n -угольной пирамиды, и R_1 – радиус сферы, касающейся всех ее ребер. Докажите, что

$$\frac{R}{R_1} \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right)$$

и представим ее в виде

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right).$$

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел a и b :

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$, где равенство имеет место только при $a = b$.

Получим

$$y = \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right) \leq \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2y}{\sin \frac{\pi}{n}} \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

или

$$\frac{R}{R_1} \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha, \quad \text{или} \quad 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1,$$

т.е. тогда, когда $n < 6$ и центры сфер совпадают (см. задачу

3). Для правильной треугольной пирамиды получаем $\frac{R}{R_1} \geq 3$,

для четырехугольной пирамиды $\frac{R}{R_1} \geq \sqrt{2}$ (равенство имеет

место при $\alpha = 45^\circ$). Для шестиугольной пирамиды и при

всех $n > 6$ имеем $\frac{R}{R_1} > 1$, т.е. $R > R_1$.

Из приведенных примеров видно, что решение связанных между собой задач упрощается, если задачи расположены в определенной последовательности так, что решение первых, более простых задач помогает отыскать решение последующих.

Предлагаем читателям для самостоятельного решения еще несколько задач о сфере, касающейся ребер правильной пирамиды.

Упражнения

1. Сторона основания правильной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h . Двугранный угол при основании равен 60° . Найдите радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R_1 сферы, касающейся всех ее ребер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

4. Радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, в два раза больше радиуса сферы, касающейся всех ее ребер. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

5. В правильной n -угольной пирамиде центр O сферы, описанной около пирамиды, симметричен центру O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, относительно плоскости основания. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к основанию. Вычислите его при $n = 6$.