Какая геометрия нужна пассажирам метро?

С.БОГДАНОВ, С.ДВОРЯНИНОВ, З.КРАУТЕР

Наверное, у многих, прочитавших название этой статьи, сразу же возникнут вопросы. Разве мы можем выбирать ту или иную геометрию? Во всех школах мира есть предмет с названием геометрия. Слово это обычно употребляется в единственном числе, в жизни мы редко говорим *геометрии*... Правда, учебники по этой геометрии разные, но предмет-то один, и содержание в этих книжках похожее: про треугольники, окружности и прочее.

Название же статьи говорит о том, что будто бы есть возможность *выбора* той или иной геометрии. Как-то это непривычно, и в школе об этом никогда не говорили. Правда, что-то упоминали о неевклидовой геометрии, о геометрии Лобачевского, но это было очень коротко, в конце учебного года, так что по этому поводу мало что запомнилось.

А уж о применении геометрии в метро как-то совсем странно говорить. Какая там геометрия? Сел в вагон и ждешь, когда до своей станции доедешь. Ехать скучно, за окном темнота.

Вот тут-то мы и можем начать наш разговор о геометрии метро.

В первую очередь в метро нас интересуют станции и то, как они соединены железнодорожными путями. Очень часто *на схемах* метрополитенов эти пути изображаются линиями разных цветов. Каждую линию будем называть *прямой*, а станции, расположенные на ней, — *точками, лежащими на этой прямой*.

Конечно, под землей реальный маршрут не обязательно идет по прямой, но для пассажиров это совершенно не важно. Поэтому можно сказать, что схема метро состоит из *точек* и *прямых*.

Какие же требования предъявляются к этим точкам и прямым, какие перед ними ставятся условия?

Условие А1. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

Конечно, это условие разумно. На рисунке 1 представлена схема метро всего с двумя станциями. Жители мегаполисов могут снисходительно усмехнуться по поводу масштабов этой транспортной системы, но и такие существуют, только не под землей, а над землей, например канатные дороги, соединяющие подножие горы с ее вершиной.

Линию метро на рисунке 1 можно продолжить и построить на ней новые станции. Получится одна

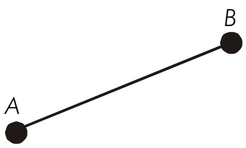

Рис. 1

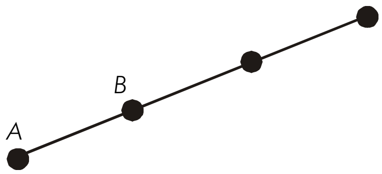

Рис. 2

прямая с несколькими станциями (рис.2). В таком случае математики говорят, что получилась геометрия из нескольких точек, лежащих на одной-единственной прямой. В частности, кольцевая схема на рисунке 3 тоже представляет собой геометрию, состоящую из одной прямой и пяти точек, лежащих на ней.

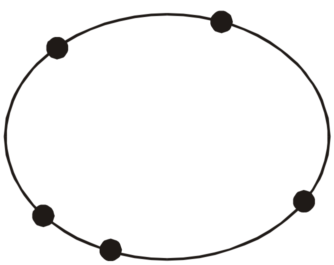

Рис. 3

Рассмотрим теперь более интересные схемы метро, в которых вместе с условием А1 выполнено новое

Условие А2. *Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Минимально возможное количество точек в этом случае равно трем. На рисунке 4 представлена схема, состоящая из трех точек и трех прямых. Особо подчеркнем, что точек именно три. На каждой из трех прямых *AB*, *BC*, *CA* лежит ровно по две точки! *Никаких других точек, кроме названных, на этих прямых нет.* Если интерпретировать рисунок 4 как схему некоторого метрополитена, то это станет особенно ясным. Пассажир не может находиться по своему желанию как угодно долго между станциями *A* и *B*, *B* и *C*, *C* и *A*. Нельзя, например, назначить свидание в какой-нибудь точке перегона *AB*! Следовательно, для пассажиров таких точек и не существует,

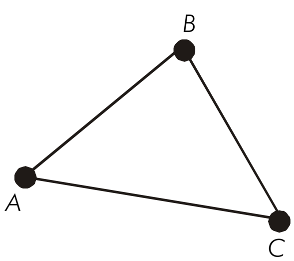

Рис. 4

Схемы на рисунке 5 содержат три прямые и девять точек. Для них выполнены условия А1 и А2.

Теперь признаемся, откуда мы взяли эти два условия. На самом деле – это две первые аксиомы из школьного учебника. Мы намерены показать, что эти аксиомы выполняются не только на знакомой нам плоскости, содержащей бесконечно много точек и

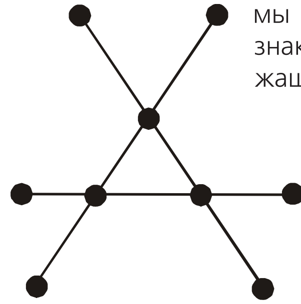
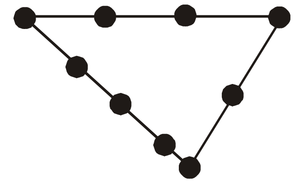

Рис. 5

бесконечно много прямых, но что они также выполняются и для геометрий, которые называются *конечными*, – в таких геометриях и множество точек, и множество прямых конечны.

Следующая, третья аксиома звучит так:

Условие А3. *Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.*

Это утверждение является теоретическим положением математики, а математика работает с идеальными,

Иллюстрация В.Акатьевой

абстрактными объектами. Такие объекты соотносятся с реальностью приближенно, с некоторой долей погрешности. Например, в любой реальной модели правильного треугольника длины его сторон хоть ненамного, но отличаются одна от другой. Так обстоит дело и с условием А3. На плоскости, к которой мы привыкли на уроках геометрии и в жизни, условие А3 выполняется. А выполняется ли оно для метрополитена, с помощью которого мы интерпретируем, трактуем конечные геометрии? Конечно, нет. Разумеется, жители больших городов мечтают о том, чтобы от каждой станции до любой другой можно было бы добраться без пересадки (в этом как раз и заключается содержание третьего условия), но в жизни так практически не бывает. Не выполняется условие А3 и на рисунке 5.

В дальнейшем, тем не менее, будем считать, что для наших схем метро требование А3 имеет место: для любых двух станций имеется линия, их соединяющая, и притом только одна.

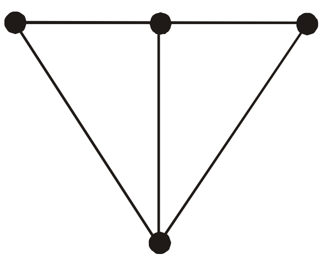

Рис. 6

Рассмотрим примеры геометрий, для которых выполнены все три условия.

Случай трех точек представлен на рисунке 4.

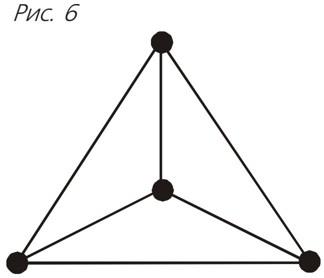

Рис. 7

Пусть даны четыре точки (четыре станции метро). На рисунке 6 имеется одна прямая с тремя точками и три прямые с двумя точками. На рисунке 7 количество прямых равно шести, на каждой прямой лежит по две точки. На этих двух рисунках прямая интерпретируется отрезком плоскости. Геометрию, соответствующую схеме на рисунке 7, можно смоделировать и другими способами. Так, на рисунке 8 прямые представлены сторонами и диагоналями четырехугольника, но пересечению диагоналей не соответствует никакая точка из нашей геометрии! Можно при этом вообразить линии метро, которые проходят под землей на разной глубине и не пересекаются. На рисунке 9 одна из прямых представлена кривой.

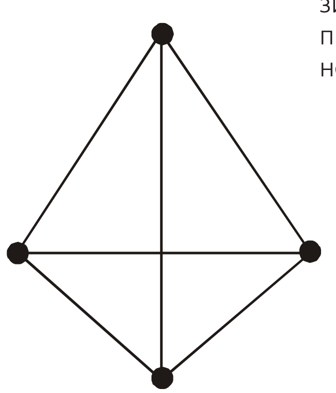

Рис. 8

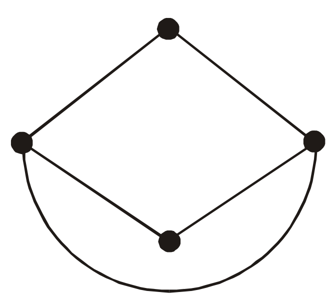

Рис. 9

На рисунке 10 представлена геометрия, содержащая семь точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* и семь прямых. На каждой прямой в этой геометрии лежит ровно по три точки. Три прямые представлены сторонами правильного треугольника, другие три прямые — его медианами, одна прямая изображается окружностью, вписанной в этот треугольник.

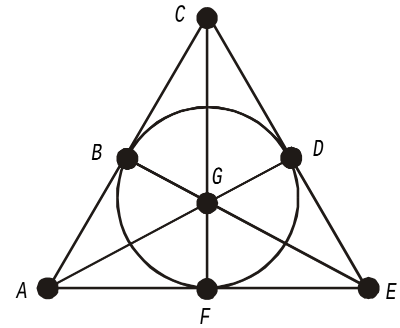

Рис. 10

Надеемся, что мы никого не запутали. А запутаться на первых порах немудрено. Только что мы сказали, что *прямая* представлена *кривой*, прямая изображается *окружностью*....

Напомним поэтому, что в геометрии понятия точки и прямой являются первичными, они никак не определяются. Важны лишь отношения между точками и прямыми, которые выражаются в аксиомах.

Помните поговорку: как угодно назови, хоть горшком, только в печь не ставь? Так и в геометрии: *любые* объекты можно назвать точками и прямыми, лишь бы они *удовлетворяли* перечисленным *условиям-аксиомам*. Здесь уместно вспомнить слова Анри Пуанкаре о том, что «математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам». Отсюда вытекает поразительная универсальность математических моделей и такая эффективность математики в приложениях, которую Нобелевский лауреат по физике Ю.Вигнер назвал непостижимой. В.В.Маяковский заметил, что, с точки зрения математики, формула «два и два — четыре» — истина и для складывания двух окурков с двумя окурками, и для складывания паровозов.

Аксиоматический метод является одним из основных и важнейших в математике. Освоить любой метод можно, лишь решая задачи. Поэтому мы предлагаем потренироваться в обращении с аксиомами, определяющими конечные геометрии.

Для геометрии из четырех точек и шести прямых можно рассмотреть пространственную модель. Точки в этой модели — это вершины тетраэдра, прямые — ребра этого тетраэдра (рис.11). Можно вообразить реальный метрополитен, расположенный внутри некоторой горы, с такой схемой.

Нетрудно доказать, что в геометрии с четырьмя точками количество прямых не превосходит шести. Действительно, пусть каждая из четырех точек соединена прямой с любой из трех других. Таких

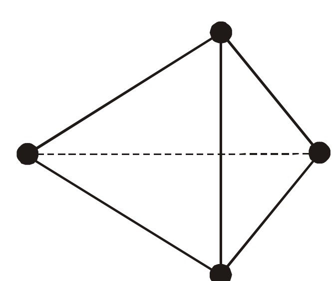

Рис. 11

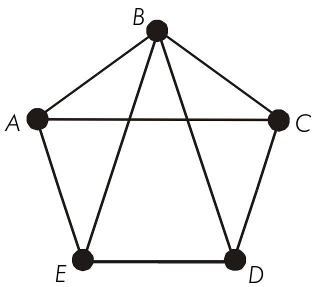

Рис. 12

прямых, стало быть, три. Произведение 4×3 равно 12, но при этом каждая прямая считается дважды. Следовательно, наибольшее количество прямых не превосходит шести.

Пусть теперь метрополитен содержит пять станций. Это означает, что мы рассматриваем конечную геометрию с пятью точками. В этом случае максимально возможное количество прямых определяется формулой $\frac{4 \times 5}{2} = 10$. При этом каждая из пяти точек соединена прямой с каждой из четырех остальных точек, и на этой прямой других точек – кроме этих двух – нет. Такая схема представлена на рисунке 12. Точки – это вершины правильного пятиугольника, прямые – все возможные попарно соединяющие их отрезки. С точки зрения конечной геометрии, это могут быть отрезки прямых или дуги каких-либо кривых. В данной геометрии это абсолютно неважно. Соединение каким-либо образом двух точек лишь выражает тот факт, что через эти две точки проходит прямая из этой геометрии.

На рисунке 13 принадлежность точек той или иной

Прямые \ Точки	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
$AB = L_1$	×	×			
$AC = L_2$	×		×		
$AD = L_3$	×			×	
$AD = L_4$	×				×
$AD = L_5$		×	×		
$AD = L_6$		×		×	
$AD = L_7$		×			×
$AD = L_8$			×	×	
$AD = L_9$			×		×
$AD = L_{10}$				×	×

Рис. 13

прямой представлена в виде диаграммы. Каждой горизонтальной строке таблицы соответствует прямая из геометрии. Двигаясь вдоль каждой горизонтальной строки этой таблицы, легко определить, какие точки лежат на соответствующей прямой. Выбор точки означает выбор вертикального столбца таблицы. Двигаясь по каждому вертикальному столбцу, можно установить, какие прямые проходят через соответствующую точку.

Рассмотрим конечную геометрию, содержащую шесть точек. Два из возможных вариантов расположения точек на прямых представлены на рисунках 14 и 15.

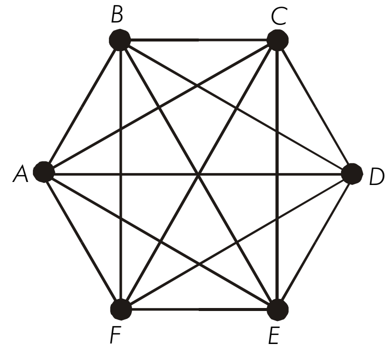

Рис. 14

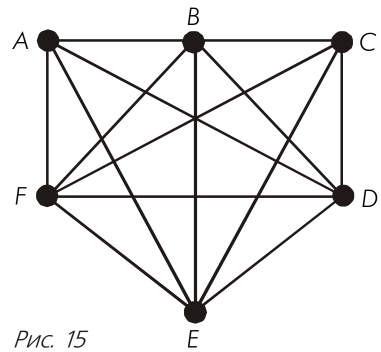

Рис. 15

В конечных геометриях используется привычное определение пересекающихся прямых. *Пересекающимися* называют прямые, имеющие одну общую точку. Из первых четырех строк рисунка 13 следует, что прямые L_1, L_2, L_3 и L_4 пересекаются в точке *A*, прямые L_4 и L_9 пересекаются в точке *E*.

Упражнение 1

а) Установите, какому их двух рисунков 14 или 15 отвечает диаграмма на рисунке 16.

б) Через какие точки проходит прямая L_{10}?

в) Назовите прямую, проходящую через точки *B* и *D*, через точки *F* и *A*.

Прямые \ Точки	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
L_1	×	×	×			
L_2			×	×		
L_3				×	×	
L_4					×	×
L_5	×					×
L_6	×			×		
L_7	×				×	
L_8		×		×		
L_9		×			×	
L_{10}		×				×
L_{11}			×		×	
L_{12}			×			×
L_{13}				×		×

Рис. 16

г) Назовите прямую, проходящую через три точки. Сколько имеется таких прямых?

д) Пересекаются ли прямые L_7 и L_{11}, L_5 и L_{11}? В каких точках?

е) Укажите прямую на рисунке, соответствующую каждой строке этой диаграммы.

На рисунке 17 представлена диаграмма, соответствующая конечной геометрии, модель которой изображена на рисунке 10.

Прямые \ Точки	A	B	C	D	E	F	G
L_1	×	×	×				
L_2			×	×	×		
L_3	×				×	×	
L_4	×			×			×
L_5		×			×		×
L_6							
L_7		×		×		×	

Рис. 17

Упражнение 2

а) В диаграмме на рисунке 17 строка, соответствующая прямой L_6, не заполнена. Определите, какие точки лежат на прямой L_6, и заполните эту строку.

б) Пользуясь диаграммой на рисунке 17, назовите прямые, пересекающиеся в точке *E*. Проверьте ответ, используя рисунок 10.

в) Составьте диаграммы для геометрий, представленных на рисунках 6 и 7.

В конечных геометриях используется хорошо знакомое определение параллельных прямых: прямые называют *параллельными*, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

В геометрии на рисунке 4 параллельных прямых нет — любые две прямые из трех имеющихся пересекаются. Нет параллельных прямых и на рисунках 5, 6, 10. (Контрольный вопрос: в какой точке на рисунке 10 пересекаются прямые, одна из которых проходит через точки *F* и *D*, а другая — через точки *G* и *E*?)

Геометрию, в которой нет параллельных прямых (т.е. любые две прямые пересекаются), называют *проективной геометрией*. В такой геометрии принимается следующая **аксиома А4–Р:** *любые две прямые или совпадают, или пересекаются.* (Здесь буква Р в обозначении — от слова *проективная*.)

Вспомним, как звучит соответствующая **аксиома А4–А** о параллельных из школьного учебника: *через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.* Такие геометрии называют *аффинными геометриями*. (От слова аффинная — вторая буква А в обозначении.)

Модель конечной аффинной геометрии представлена на рисунках 7, 8, 9, 11.

В *гиперболической геометрии* (или геометрии Лобачевского) принимается такая **аксиома А4–G:** *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, параллельных данной прямой.* Буква G в обозначении аксиомы — от слова *гиперболическая*. Конечные геометрии с такой аксиомой представлены на рисунках 12, 14, 15. Так, на рисунке 12 прямые *BC* и *CD*, проходящие через точку *C*, параллельны прямой *AE*.

Таким образом, в нашей воображаемой геометрии метро могут быть реализованы три различные геометрии: проективная, в которой выполнены условия **А1, А2, А3, А4–Р,** аффинная — с условиями **А1, А2, А3, А4–А,** гиперболическая — с аксиомами **А1, А2, А3, А4–G.**

Мы рассказали о различных примерах конечных геометрий и их моделях. При этом прямая была представлена либо некоторой линией, либо ребром многогранника, либо строкой таблицы. Опишем теперь построение *арифметической* модели, пригодной для интерпретации любой конечной геометрии. В этом случае *точками* будем называть различные простые числа, а *прямыми* — произведения некоторых из этих чисел.

Например, точки на рисунке 4 можно трактовать как числа 2, 3, 5, а прямые — как числа 6, 10, 15, равные их попарным произведениям.

Пусть точки на рисунке 6 — это числа 2, 3, 5, 7. Тогда прямые — это числа 14, 21, 35 и 30. На последней прямой 30 лежат три точки 2, 3 и 5 — произведение этих чисел как раз равно 30.

Рассмотрим в такой геометрии прямую *b* и точку *a* (здесь *a* — простое число, *b* —составное число, имеющее по аксиоме **А1** по крайней мере два простых сомножителя). Будем говорить, что *прямая b проходит через точку a*, если число *a* является делителем числа *b*. Ясно, что *прямые b и c пересекаются в точке a*, если НОД$(b, c) = a$, где НОД(b, c) — наибольший общий делитель чисел *b* и *c*. И наконец, *прямые b и c являются параллельными*, если НОД$(b, c) = 1$, т.е. *b* и *c* — взаимно простые числа.

Например, геометрия, представленная на рисунке 12 (или в таблице 13), может быть образована пятью точками — пятью простыми числами 2, 3, 5, 7, 11 и десятью прямыми — попарными произведениями этих простых чисел: $2\times3=6$; $2\times5=10$; $2\times7=14$; $2\times11=22$; $3\times5=15$; $3\times7=21$; $3\times11=33$; $5\times7=35$, $5\times11=55$; $7\times11=77$. Здесь прямые 22 и 21 параллельны, так как НОД$(22, 21) = 1$, а прямые 15 и 35 пересекаются в точке 5, ибо НОД$(15,35) = 5$.

Упражнение 3

а) Точки в геометрии на рисунке 12 отождествим с простыми числами 13, 17, 19, 31, 37. Укажите все прямые в этой геометрии. Через какие точки проходит прямая 527?

б) Пересекаются ли прямые 527 и 323?

в) Докажите, что прямые 527 и 481 параллельны.

г) Постройте арифметические модели всех рассмотренных выше геометрий и проверьте выполнение аксиом для некоторых элементов этих геометрий.

В заключение заметим, что в геометрии, изучаемой в школе, выполняются аксиомы **А1, А2, А3, А4–А**. Следовательно, школьная геометрия является аффинной. Она, как хорошо известно, не является конечной. Существуют также проективные и гиперболические геометрии, не являющиеся конечными.