

Рис. 4

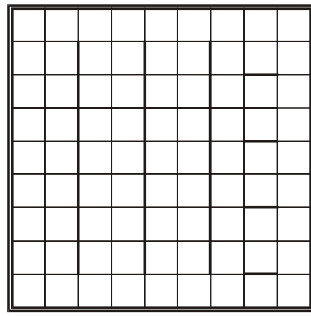


Рис. 5

такое значение достижимо (на нем открытые двери обозначены тонкими линиями, а закрытые – жирными).

б) Здесь в каждой белой комнате открыто не более 2 дверей, значит, всего открыто не больше  $2 \times 40 = 80$  дверей. Рисунок 4 подтверждает, что такое тоже возможно.

в) Если здесь пойти тем же путем, то можно получить, что число открытых дверей не превышает  $3 \times 40 = 120$ . Однако практически достичь такого значения невозможно. Оказывается (вот некий легкий парадокс!), точнее ограничение сверху могут дать... черные комнаты, хотя их и больше! Дело в том, что 4 угловые черные комнаты имеют всего по 2 двери, остальные 37 черных комнат – больше чем по 2 двери. Поэтому общее число открытых дверей в черных комнатах не превышает  $2 \times 4 + 3 \times 37 = 119$ . А уж такое-то значение достижимо (рис.5).

Калейдоскоп «Кванта»

1.  $n$ .
2. Нет. Рассмотрите множество вершин правильного 11-угольника.
3. См. рис.6.
4. 6 осей, проходящих через середины противоположных ребер, и 3 оси, проходящие через центры противоположных граней.

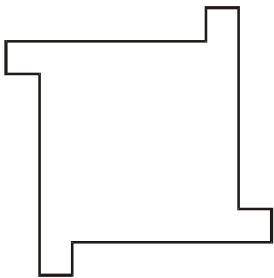


Рис. 6

5. 3 оси, проходящие через середины противоположных ребер.
6. Выбрав некоторую ось симметрии  $l$ , докажете, что для любой оси симметрии  $m$  прямая, симметричная прямой  $m$  относительно  $l$ , тоже является осью симметрии. Таким образом, все оси симметрии, скрещивающиеся с прямой  $l$  или оси, пересекающие  $l$ , но не перпендикулярные ей, разбиваются на пары. (Честно говоря, если количество осей симметрии конечно, то они проходят через одну точку. Но в решении задачи можно обойтись и без доказательства этого факта.) А для любой оси симметрии  $m$ , перпендикулярной прямой  $l$  и пересекающей прямую  $l$ , докажете, что прямая, проходящая через точку их пересечения перпендикулярно обеим прямым, тоже является осью симметрии.
7. а) Сечение этого тела плоскостью  $\alpha$ , проходящей через оси цилиндров, – квадрат. Поэтому тело имеет плоскость симметрии  $\alpha$  и еще четыре перпендикулярные  $\alpha$  плоскости, проходящие через оси симметрии квадрата. б) Тело имеет 9 плоскостей симметрии (как куб).
8. а)  $8 \cdot 3! = 48$ ; б)  $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ ; в)  $20 \cdot 3! = 120$ ; г)  $12 \cdot 5 \cdot 2 = 120$ . Половина самосовмещений сохраняют ориентацию, половина – меняют.
9. а)  $6!/24 = 30$ ; б)  $8!/24 = 1680$ ; в)  $12!/60 = 7983360$ ; г)  $20!/60 = 40548366802944000$ .

10. Поверните правильный пятиугольник вокруг его центра на угол, не кратный  $72^\circ$ .
11. Одна точка; две точки; вершины правильного многоугольника; объединение множества вершин правильного многоугольника с его образом при повороте вокруг центра многоугольника.

Нелинейные элементы в электрических цепях

1. Сопротивление надо уменьшить на 200 мОм.
2.  $a = \frac{1}{\sqrt{P_x (R_2 R_3 / R_1)^3}} = 0,125 \text{ A/B}^2$ .
3.  $I_0 = \frac{E - U_0}{R} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ ;  $q = C(E - U_0) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$ ;  
 $Q_R = \frac{C(E - U_0)^2}{2} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$ .

Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды

1.  $R_1 = \frac{a(2b-a)}{2\sqrt{2b^2-a^2}}$ ,  $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$ .
2.  $r = \frac{1}{3}h$ ,  $R_1 = \frac{1}{3}h(\sqrt{10} - \sqrt{2})$ .
3.  $R_1 = 4R \sin \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2}\right)$ ,  $0^\circ < \gamma < 60^\circ$ .
4.  $\gamma \approx 37^\circ$  и  $\gamma \approx 86^\circ$ .
5. При  $n = 6$   $\cos \alpha \approx 0,640$  ( $\alpha \approx 50^\circ 10'$ ).

LXV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. БАО = 143. *Решение.* Если  $B \geq 2$ , то  $BA \geq 20$  и  $BAO > 200$ , так что  $BAO \cdot BA \cdot B > 200 \cdot 20 \cdot 2 = 8000 > 2002$ . Значит,  $B = 1$ . Разложим число 2002 на простые множители:  $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ . Теперь легко выписать все начинающиеся на цифру 1 двузначные делители числа 2002. Это числа 11, 13 и  $2 \cdot 7 = 14$ . Вычислим соответствующие частные:  $2002 : 11 = 182$ ,  $2002 : 13 = 154$  и  $2002 : 14 = 143$ . Ответ очевиден: БАО = 143.
2. 2 или 6. *Решение.* Фигура состоит из 22 клеток. Если получилось  $x$  трехклеточных уголков и  $y$  четырехклеточных, то  $3x + 4y = 22$ . Очевидно,  $x$  четно и  $x < 8$ , так что  $x = 0, 2, 4$  или 6. Значения  $x = 0$  или 4 не подходят:  $y$  получается нецелым. При  $x = 2$  или 6 получаем  $y = 4$  или, соответственно,  $y = 1$ . Оба случая возможны, как показано на рисунке 7.
3. 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227. *Решение.* Обозначим наименьшее из десяти чисел буквой  $x$ . Тогда  $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) - (x+y) = 2002$ , где  $x+y$  – вычеркнутое число (так что  $0 \leq y \leq 9$ ). Упростим уравнение:  $10x + 45 - x - y = 2002$ , т.е.  $9x = 1957 + y$ .

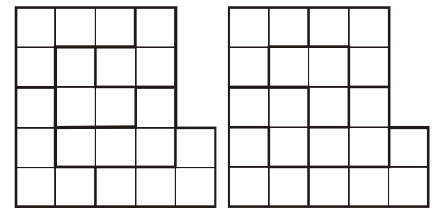


Рис. 7