Если c – четное, то $a + c = 13$, откуда $c = 6$, $d = 13$.
В случае $b = 7$ аналогично рассматриваются уравнения $b + c = 20$ или $b + c = 13$. В любом случае искомый набор составляют числа {6, 7, 9, 13}.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку число $\overline{ab} = a \cdot 10^5 + b$ делится на ab, то число b должно делиться на a. Из равенств $a \cdot 10^5 + b = abc$, $b = ka$, где числа c и k натуральные, получаем $10^5 + k = kac$. Отсюда, поскольку k однозначно, k равно 1, 2, 4, 5 или 8. Замечаем также, что число kc однозначное и $c > 1$.
Приступим к поиску примера. Число 100001 не имеет отличных от 1 однозначных делителей. Число 100002 имеет однозначный делитель, кратный 2 и больший 2: число 6. Это и дает пример: $a = \frac{100002}{6} = 16667$, $b = 2a = 33334$. Других примеров нет. В самом деле, числа $5c$ и $8c$ не были бы однозначными. Число $4c$ могло бы равняться лишь 8, но 100004 на 8 не делится.

17. Пусть выбранные числа равны x и y, причем для определенности $x < y$. Так как сумма всех данных чисел равна $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, то сумма всех чисел, за исключением выбранных, равна $\left(\frac{n(n+1)}{2} - x - y\right)$, и в соответствии с условием получаем

$$xy = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - x - y\right).$$

Это – уравнение с тремя целыми неизвестными x, y, n. Запишем его в виде

$$x(y+2) = n(n+1) - 2y.$$

Учитывая, что $y \le n$, получаем

$$x = \frac{n(n+1) - y}{y+2} \ge \frac{n(n+1) - 2n}{n+2} =$$

$$= \frac{n^2 - n}{n+2} = \frac{(n^2 + 2n) - (3n+6) + 6}{n+2} = n - 3 + \frac{6}{n+2} > n - 3.$$

Итак, $x \ge n - 2$. Таким образом, имеем следующее неравенство: $n - 2 \le x < y \le n$. С учетом того, что все числа целые, получаем не очень-то много различных вариантов – всего лишь три. Рассмотрим их все.

1) $x = n - 2$, $y = n - 1$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$(n-2)(n-1) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-2) - (n-1)\right),$$

откуда, после упрощений, $2 = 6$, что невозможно.

2) $x = n - 2$, $y = n$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$(n-2)n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-2) - n\right),$$

откуда, после упрощений, $n = 4$. Тогда $x = 2$, $y = 4$. И действительно, среди чисел 1, 2, 3 и 4 можно выбрать два (2 и 4), произведение которых вдвое больше суммы двух других (1 и 3).

3) $x = n - 1$, $y = n$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$(n-1)n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) - n\right),$$

откуда, после упрощений, $n = 1$, что невозможно, поскольку $n \ge 3$.

Итак, ответ единственный: $n = 4$.

18. Если $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, то и $\angle AOM = \frac{\pi}{3}$. Значит, треугольник AOM правильный, $MO = MA$. Отсюда по лемме, приведенной ниже, $MO = MI$.
Обратно, если $MO = MA$, то треугольник AOM правильный, $\angle AOM = \frac{\pi}{3}$, $\angle ABM = \frac{\pi}{6}$, $\angle ABC = 2\angle ABM = \frac{\pi}{3}$.

Лемма. $MA = MI = MC$.

Доказательство леммы (рис.2).

$$\angle IAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{MCN},\ \angle AIM = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AM} + \overset{\smile}{BN}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{MC} + \overset{\smile}{CN}\right).$$

Значит,

$$\angle IAM = \angle AIM,\ MA = MI.$$

Аналогично, $MI = MC$. Лемма доказана.

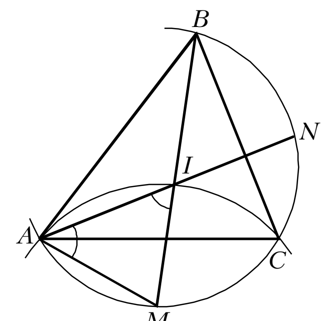

Рис. 2

19. Покажем, что губернатор справится со своей задачей за два дня, если будет действовать следующим образом.
В первый день он приглашает для опроса всех островитян. Получив ответы, губернатор разбивает островитян на группы, объединяя в одну группу островитян, давших один и тот же ответ. Пусть число групп оказалось равным n. Все правдивые островитяне дали правильные ответы. Поэтому все они окажутся в одной группе. Все лжецы окажутся в других $n - 1$ группах. Если, в частности, $n = 1$, то все островитяне правдивые. Если же $n > 1$, то на следующий день губернатор может пригласить для опроса ровно по одному островитянину из каждой группы. Среди приглашенных n островитян будет ровно один правдивый, который даст ответ: «$n - 1$». Этот островитянин, а также все другие, которые объединены с ним в одну группу после опроса в первый день, являются правдивыми. Все остальные островитяне – лжецы.
За один день губернатор может не справиться со своей задачей. Предположим, после первого опроса m островитян ответили, что среди опрашиваемых k лжецов, а k островитян ответили, что среди опрашиваемых m лжецов. Такие ответы могли быть получены и в случае, когда среди опрашиваемых m правдивых и k лжецов, но также и в случае, когда среди опрашиваемых k правдивых и m лжецов. Таким образом, для того чтобы установить истину, губернатору, вообще говоря, одного дня не достаточно.

20. Удобно ввести условную единицу длины, равную 10 метрам. Тогда мы имеем зал размером 9×9, разбитый на комнаты 1×1. Во всех трех случаях ключ к решению один: раскрасим комнаты в шахматном порядке в черный и белый цвета так, чтобы угловые комнаты были черными. Тогда белых комнат окажется 40, а черных – 41. При этом каждая открытая дверь «принадлежит» двум соседним комнатам разного цвета. Таким образом, общее число открытых дверей равно суммарному количеству открытых дверей в белых комнатах и оно же равно суммарному количеству открытых дверей в черных комнатах. А дальше решим каждый пункт условия отдельно.
а) Из вышеизложенного следует, что в каждой белой комнате открыто не более 1 двери, значит, всего открыто не больше $1 \times 4 = 40$ дверей. Рисунок 3 подтверждает, что

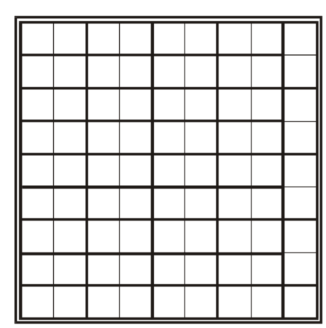
Рис. 3