сел. Зафиксируем любое нецелое $\alpha > 4$ и покажем, что для него существует иррациональное β, удовлетворяющее условиям. Для этого обозначим $a_1 = [\alpha] + 1{,}01$ и $b_1 = [\alpha] + 1{,}99$. Тогда

$$b_1 > a_1 > 5$$

и

$$b_1^2 - a_1^2 = (b_1 + a_1)(b_1 - a_1) > 5.$$

Перенумеруем все рациональные числа отрезка $[a_1; b_1]$, т.е. выпишем все их в виде последовательности $c_1, c_2, c_3, \cdots$ Построим такую последовательность отрезков $[a_k; b_k]$, что

• отрезок $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ лежит в отрезке $[a_k; b_k]$;

• $c_k \notin [a_{k+1}; b_{k+1}]$;

• $b_k^{k+1} - a_k^{k+1} > 5$;

• для любого числа $\beta \in [a_k; b_k]$ целая часть ни одного из чисел β^n, где $n \le k$, не равна целой части ни одного из чисел α^m ни при каком натуральном m.

Поскольку $4^2 - 4 = 12$, то целые части степеней числа α различаются не менее чем на 11. Пусть отрезок $[a_k; b_k]$ построен. Поскольку длина отрезка $\left[a_k^{k+1}; b_k^{k+1}\right]$ больше 5, то в нем содержатся хотя бы четыре отрезка с концами в соседних натуральных числах. Хотя бы в одном из них нет (нецелого!) числа c_k^{k+1} и нет ни одной степени числа α; пусть это отрезок $[n; n+1]$. Положим $a_{k+1} = \sqrt[k+1]{n}$ и $b_{k+1} = \sqrt[k+1]{n+1}$. Тогда

$$b_{k+1}^{k+2} - a_{k+1}^{k+2} = b_{k+1}(n+1) - a_{k+1}n > a_{k+1}(n+1) - a_{k+1}n = a_{k+1} > 5.$$

Построение закончено. Очевидно, общая точка β всех построенных отрезков удовлетворяет условиям.

б) *Первый способ*. Если разрешить себе воспользоваться теоремой 10, то достаточно для каждого простого числа p рассмотреть такие натуральные числа a и b, что $a^2 - pb^2 = 1$, и положить $\alpha = a + b\sqrt{p}$.

Второй способ обходится без использования еще не доказанной нами теоремы 10. А именно, для любого натурального числа $k > 1$ рассмотрим $\alpha_k = k + \sqrt{k^2 - 1}$. Докажем существование такого бесконечного множества натуральных чисел k_n, что $k_n > 1$ и $\left(k_r^2 - 1\right)/\left(k_s^2 - 1\right)$ не является квадратом рационального числа ни для каких двух различных натуральных r и s. (Тогда натуральные числа $x = \left(\left[\alpha_k^m\right] + 1\right)/2 =$ $= \left(\left(k + \sqrt{k^2-1}\right)^m + \left(k - \sqrt{k^2-1}\right)^m\right)/2$ и

$y = \left(\left(k + \sqrt{k^2-1}\right)^m - \left(k - \sqrt{k^2-1}\right)^m\right)/\left(2\sqrt{k^2-1}\right)$ удовлетворяют уравнению $x^2 - \left(k^2 - 1\right)y^2 = 1$. Поэтому аналогично второму способу решения пункта а) можно убедиться, что числа α_{k_n} удовлетворяют требованию задачи.) Пусть $k_1 = 2$ и $k_{n+1} = \left(k_n^2 - 1\right)!$, где n – натуральное число. Тогда k_{n+1} делится на каждое из чисел $k_r^2 - 1$, где $r = 1, 2, \ldots, n$. Значит, числа $k_{n+1}^2 - 1$ и $k_r^2 - 1$ взаимно просты, откуда и следует нужное нам утверждение.

Третий способ. Достаточно построить такую последовательность положительных иррациональных чисел α_1, α_2, α_3, … и такую последовательность простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, что для любых натуральных m и n число $\left[\alpha_m^n\right] + 1$ делится на p_m и не делится на p_k ни при каком $k < m$.

Лемма. *Для любого натурального числа a уравнение $ax + 1 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

Доказательство. Для любого натурального r положим $y = ar + 1$ и $x = ar^2 + 2r$.

Лемма доказана. Начнем построение. Положим $p_1 = 3$ и $\alpha_1 = 3\left(2 + \sqrt{3}\right)$. Тогда при любом натуральном n число $\left[\alpha_1^n\right] + 1 = 3^n\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + 3^n\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ целое и даже кратное $p_1 = 3$.

Предположим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $p_1, \ldots, p_n$ уже найдены. Рассмотрим произведение $a = p_1 p_2 \ldots p_n$. Выберем простое число $p_{n+1} > a$ и натуральные числа x и y, для которых $y^2 = ax + 1$ и $y > p_{n+1}$. Пусть $\alpha_{n+1} = p_{n+1}\left(y + \sqrt{ax}\right)$. Тогда

$$\left[\alpha_{n+1}^m\right] + 1 = p_{n+1}^m\left(y + \sqrt{ax}\right)^m + p_{n+1}^m\left(y - \sqrt{ax}\right)^m$$

делится на p_{n+1} и не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$.

«Квант» для «младших» школьников»

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Если фамилия сестры, например, Смородина, то брат может иметь фамилию Смородина или Смородин – однозначно сказать нельзя.

2. 608347 − 491051 = 117296. [1]

3. Лист размером 4×4 сгибается пополам и разрезается по линии сгиба (рис.1,*а*). На одну из полученных половин накладывается лист размером 3×3 так, чтобы оставалась свободной площадь размером 2×1, которая и отрезается

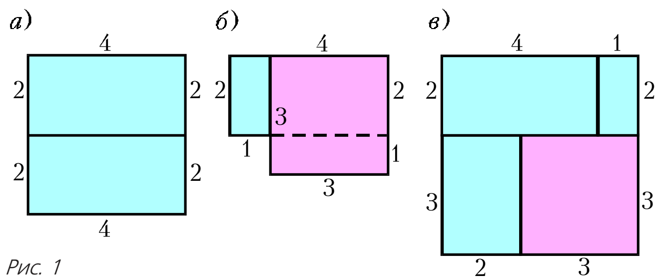

Рис. 1

(рис.1,*б*). Таким образом, квадрат 4×4 разрезан на три прямоугольника размерами 4×2, 3×2 и 2×1. Совместно с квадратом 3×3 из этих прямоугольников составляется квадрат размером 5×5 (рис.1,*в*).

4. Докажем, что число 100 представить нельзя. Предположим противное и обозначим средние числа через x и $x + 1$. Сумма всех ста чисел это сумма 50 слагаемых вида $((x - a) +$ $+ (x + 1 + a))$. Значит, $100 = 50 \cdot (2x + 1)$, т.е. $2 = 2x + 1$, чего для целого x быть не может. Противоречие.

Докажем теперь, что число $101 = 2 \cdot 50 + 1$ представить можно. Для этого рассмотрим числа −49, −48, …, 0, .., 49, 50, 51. Ясно, что их сумма равна 50 + 51 = 101. Это представление единственно – подумайте, почему.

5. Поскольку

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c),$$

а из попарных сумм чисел 13, 15, 16, 20 и 22 совпадают только 13 + 22 = 15 + 20 = 35, то $a + b = 16$, $c + d = 35 - 16 = 19$. Итак, натуральные числа a и b одинаковой четности, c и d – разной. Следовательно, суммы $a + c$ и $b + c$ могут находиться либо среди чисел набора {13, 15}, либо среди чисел набора {20, 22}. И в том, и в другом случае $|a - b| = 2$.

Из системы

$$\begin{cases} a + b = 16, \\ |a - b| = 2 \end{cases}$$

находим $a = 7$, $b = 9$ или $a = 9$, $b = 7$. Пусть $a = 7$. Если c – нечетное, то $a + c = 20$, откуда $c = 13$ и $d = 6$.

[1] *Заметим, что индекс почтового отделения редакции «Кванта» изменился – теперь он 119296.*