

б) Воспользуемся формулой $(a\sqrt{3} + b\sqrt{2})(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2 = (5a \pm 4b)\sqrt{3} + (5b \pm 6a)\sqrt{2}$. Пусть a, b – натуральные числа и $3a^2 - 2b^2 = 1$. Тогда $3(5a - 4b)^2 - 2(5b - 6a)^2 = 1$. Если $5a - 4b \leq 0$, то $3a^2 - 2b^2 \leq 3\left(\frac{4}{5}b\right)^2 - 2b^2 = -\frac{2}{25}b^2 < 0$. Зна-

чит, $5a - 4b > 0$. Если $5b - 6a \leq 0$, то $3a^2 - 2b^2 \geq 3\left(\frac{5}{6}b\right)^2 - 2b^2 = \frac{1}{12}b^2$. Осталось проверить значения $b = 1, 2, 3$. Подходит только $b = 1$, которому соответствует $a = 1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательствам теорем 2, 3, 5, 9.

36. а) Вспомнив пункт б) упражнения 20, видим: годятся $a = \Phi_{2n-1}$ и $b = \Phi_{2n+1}$, где n – натуральное число. в) Если $a = b$, то $c = 2 + \frac{1}{a^2}$, так что $a = 1$ и $c = 3$. Пусть $c \neq 3$ и $a < b$, причем b – наименьшее возможное. Положим $A = ca - b$ и $B = a$. Очевидно,

$$A = ca - b = \frac{a^2 + 1}{b} < a + 1.$$

Значит,

$$0 < A \leq a = B < b$$

и

$$A^2 + B^2 + 1 = A^2 + a^2 + 1 = A^2 + Ab = A(A + b) = ABc.$$

Получили противоречие: число b оказалось не самым маленьким из возможных!

д) Пусть $x^2 - (n^2 - 4)y^2 = -4$, где x, y – натуральные числа. Число x той же четности, что и число ny . Значит, число $a = (x + ny)/2$ натуральное. Как легко убедиться, $a^2 + y^2 + 1 = ayn$.

37. а) Случай $a = b$ невозможен: число $\frac{2a^2}{a^2 - 1} = 2 + \frac{2}{a^2 - 1}$ не может быть целым ни при каком натуральном a .

Предположим, что при некотором натуральном t уравнение

$$x^2 - txy + y^2 + t = 0 \quad (*)$$

имеет решения в натуральных числах x, y . Рассмотрим наименьшее натуральное $x = a$, для которого существует натуральное $y = b < a$, удовлетворяющее равенству (*). При фиксированных t и b уравнение $x^2 - txb + b^2 + t = 0$ – квадратное относительно x . Если оно имеет натуральный корень a , то по теореме Виета оно имеет и целый корень $A = tb - a$. Если $A \leq 0$, то

$$a^2 - tab + b^2 + t = a(a - tb) + b^2 + t > 0,$$

что неверно. Значит, $A \geq a$. Если $A = a$, то дискриминант равен нулю:

$$(tb)^2 - 4(b^2 + t) = 0,$$

откуда $4t = (t^2 - 4)b^2 \geq t^2 - 4$, так что $t \leq 4$; но при $t = 1, 2, 3, 4$ равенство $4t = (t^2 - 4)b^2$ не имеет места.

Итак, $A > a$. По теореме Виета, $aA = b^2 + t$ и $a + A = tb$. Поэтому

$$b^2 + t - tb = aA - a - A = (a - 1)(A - 1) - 1 \geq \geq b(b + 1) - 1 = b^2 + b - 1,$$

откуда

$$t(1 - b) \geq b - 1.$$

Это возможно лишь при $b = 1$, причем все неравенства должны обращаться в равенства, т.е. $a = 2, A = 3, t = 5$.

б) Два решения найти легко: $(x; y) = (1; 2)$ или $(1; 3)$. Из

каждого решения $(x; y)$, где $x < y$, можно получить новое решение $(y; 5y - x)$. Действительно, $(5y - x)^2 - 5(5y - x)y + y^2 = x^2 - 5xy + y^2$. При этом $5y - x > 4y > y$. Таким образом, любые два соседних члена любой из последовательностей

$$1, 2, 9, 43, 206, 987, \dots,$$

$$1, 3, 14, 67, 321, 1538, \dots,$$

где каждый член получается из двух предыдущих x, y по формуле $5y - x$, дают решение интересующего нас уравнения. На самом деле мы нашли все решения в натуральных числах! Докажем это. Пусть $0 < X < Y$ и $X^2 - 5XY + Y^2 + 5 = 0$.

Рассмотрим преобразование $(X; Y) \rightarrow (x; y)$, где $x = 5X - Y$ и $y = X$. Если $x < X$, то $\min(x, y) < \min(X, Y)$, так что удалось получить «меньшее» решение в натуральных числах. Если же $5X - Y \geq X$, то $5 = (5X - Y)Y - X^2 \geq XY - X^2 = X(Y - X) \geq X$. Перебрав значения $X = 1, 2, 3, 4, 5$, находим $(X; Y) = (1; 2)$ или $(1; 3)$.

39. Обозначим для краткости $\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ и $\beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Тогда

$$\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n = (\alpha^n - \beta^n)^2.$$

Осталось доказать, что число $a_n = \alpha^n - \beta^n$ является целым, если n четно, и в $\sqrt{5}$ раз больше целого числа, если n нечетно. Это можно сделать по индукции, проверив равенства $a_1 = 1$ и $a_2 = \sqrt{5}$ и рекуррентную формулу

$$a_{n+2} = \alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n) = a_{n+1}\sqrt{5} - a_n.$$

40. а) *Первый способ.* Пусть $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ и $\beta = 3 \cdot (2 + \sqrt{3})$.

Тогда числа $a = (2 + \sqrt{3})^m + (2 - \sqrt{3})^m$ и $b = 3^n (2 + \sqrt{3})^n + 3^n (2 - \sqrt{3})^n$ целые, причем a не делится на 3, а b – делится. Очевидно, $\left[(2 + \sqrt{3})^m\right] = a - 1$ и, поскольку

$$3(2 - \sqrt{3}) = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} < 1, \text{ то } \left[3^n (2 + \sqrt{3})^n\right] = b - 1.$$

Второй способ. Числа $a = \left[(2 + \sqrt{3})^m + (2 - \sqrt{3})^m\right]/2$ и

$b = \left[(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n\right]/2$ – натуральные, причем для некоторых натуральных c и d имеем $a^2 - 3c^2 = 1$ и

$$b^2 - 2d^2 = (-1)^n. \text{ Если } \left[(2 + \sqrt{3})^m\right] = \left[(1 + \sqrt{2})^n\right], \text{ то в случае}$$

нечетного n имеем $2a - 1 = 2b$, что невозможно, а в случае

четного n имеем $2a - 1 = 2b - 1$, так что $a = b$, откуда

$3c^2 = 2d^2$, что невозможно для натуральных чисел c и d .

Третий способ предложил Г.Челноков. В статье «Пентиум» хорошо, а ум лучше» («Квант» №4 за 1999 год) доказано следующее утверждение: если α и β – положительные иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, то для любых натуральных чисел m и n целые части чисел $m\alpha$ и $m\beta$ различны. В таком случае числа 10^α и 10^β имеют разное количество цифр, так что достаточно доказать существование таких положительных иррациональных α и β , что $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ и числа 10^α и 10^β иррациональны. Это легко сделать, воспользовавшись несчетностью континуума.

Четвертый способ предложил И.Богданов. Изложим решение, естественное для студента, изучившего теорему о стягивающихся отрезках и счетность множества рациональных чи-