статье «Многочлены деления круга» в «Кванте» №1 за 1998 год) или разложением

$$64m^{12}+1=\left(4m^4+1\right)\left(4m^4-4m^3+\right.$$
$$\left.+2m^2-2m+1\right)\left(4m^4+4m^3+2m^2+2m+1\right).$$

31. Неравенство $\left|\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{2}\right|<\frac{1}{2}$ можно записать в виде $\left|a^2-b^2-2ab\right|<2$, откуда $(a-b)^2-2b^2=\pm1$. Значит, $(a-b;\ b)=(1;\ 1)$, $(3;\ 2)$, $(7;\ 5)$, $(17;\ 12)$ или $(41;\ 29)$, откуда $(a;\ b)=(2;\ 1)$, $(5;\ 2)$, $(12;\ 5)$, $(29;\ 12)$ или $(70;\ 29)$. Треугольник с катетами 29 и 12 расположить можно, ибо $29+\frac{12}{2}<40$ и $12+\frac{29}{2}<32$. А треугольник с катетом 70 расположить нельзя, ибо $70^2>40^2+32^2$.

32. Надо решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2},$$

т.е. $2n(n+1)=k(k+1)$. Умножив обе части на 2, получаем уравнение

$$(2n+1)^2-1=2k^2+2k.$$

Обозначим $x=2n+1$ и еще раз умножим на 2 обе части уравнения:

$$2x^2-2=(2k+1)^2-1.$$

Обозначив $2k+1=y$, получаем уравнение $2x^2-1=y^2$, которому, как мы знаем, удовлетворяют числа вида $x=\left(\left(1+\sqrt2\right)^{2m+1}-\left(1-\sqrt2\right)^{2m+1}\right)\Big/\left(2\sqrt2\right)$. Следовательно, $n=\left(\left(1+\sqrt2\right)^{2m+1}-\left(1-\sqrt2\right)^{2m+1}-2\sqrt2\right)\Big/\left(4\sqrt2\right)$, где m – натуральное число.

33. а) Применим индукцию для доказательства того, что соседние члены рассматриваемой последовательности удовлетворяют уравнению. *База*. $0^2-m\cdot0\cdot1+1^2=1$. *Переход*. В последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ за каждой парой $a_k=x$, $a_{k+1}=y$ следует пара $(a_{k+1};\ a_{k+2})=(a_{k+1};\ ma_{k+1}-a_k)=(y;\ my-x)$. Очевидно,

$$y^2-my(my-x)+(my-x)^2=y^2-(my-x)(my-(my-x))=$$
$$=y^2-(my-x)x=x^2-mxy+y^2,$$

что и требовалось.

Теперь докажем, что других решений в целых неотрицательных числах у рассматриваемого уравнения нет. Предположим, что $X^2-mXY+Y^2=1$ и $0\le X\le Y$. Если при этом $X=0$, то, очевидно, $Y=1$. Если же $X>0$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} y=X, \\ my-x=Y. \end{cases}$$

Очевидно, $x=mX-Y$ и $y=X$. Если $mX-Y<0$, то $mXY<Y^2$ и $1=X^2-mXY+Y^2>X^2\ge1$, что невозможно. Значит, $x=mX-Y\ge0$. Если $x=0$, то $y=1$. Если же $x>0$, то пара натуральных чисел $(x;\ y)$ удовлетворяет равенству $x^2-mxy+y^2=1$ и условиям $x<y=X\le Y$ (проверьте!). Переходя таким образом от пары $(X;\ Y)$ к предшественнице $(x;\ y)$, затем от $(x;\ y)$ – к ее предшественнице и так далее, мы рано или поздно должны будем остановиться, а остановиться сможем лишь тогда, когда получим решение $(x;\ y)=(0;\ 1)$. Значит, за конечное число операций вида $(X;Y)\to(x;y)$ мы из любого решения в натуральных числах получим решение $(0;\ 1)$. Поэтому, идя по этой цепочке в обратном направлении, т.е. начав с пары $(0;\ 1)$ и многократно выполняя преобразование $(x;y)\to(X;Y)$, мы получим любое решение уравнения в целых неотрицательных числах $x\le y$.

б) *Первый способ*. Рассуждайте по индукции, предварительно доказав тождество $\varphi_{n+4}=3\varphi_{n+2}-\varphi_n$.

Второй способ. Уравнение $x^2-3xy+y^2=1$ заменой $y=x-z$ можно привести к виду $z^2+zx-x^2=1$. Решения $(x;z)=(\varphi_{2n};\varphi_{2n-1})$ соответствуют решениям исходного уравнения в неотрицательных целых числах x и y, удовлетворяющих неравенству $x\ge y$. Значит, $(x;y)=(x;x-z)=$ $=(\varphi_{2n};\varphi_{2n}-\varphi_{2n-1})=(\varphi_{2n};\varphi_{2n-2})$.

Третий способ. Приведите уравнение к виду $(2x-3y)^2-5y^2=4$, вспомните следствие теоремы 7 (см. предыдущий номер журнала) и рассмотрите два случая: $2x-3y>0$ и $2x-3y<0$.

34. а) Для $p=2$ годятся $x=y=1$. Для $p=17$ годятся $x=4$, $y=0$. Для любого другого простого p рассмотрим числа вида x^2, где $x=0,\ 1,\ \ldots,\ (p-1)/2$, и числа вида $34y^2-1$, где $y=0,\ 1,\ \ldots,\ (p-1)/2$. Докажите, что как $(p+1)/2$ рассматриваемых чисел вида x^2 дают разные остатки при делении на p, так и $(p+1)/2$ рассматриваемых чисел вида $34y^2-1$ дают разные остатки при делении на p. Поскольку $\frac{p+1}{2}+\frac{p+1}{2}>p$, то хотя бы одно число одного вида сравнимо по модулю p с числом другого вида, т.е. найдется такая пара $(x;\ y)$, что x^2-34y^2+1 делится на p.

г) Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках, т.е. тем, что существуют такие числа x и y, для которых $x\equiv x_1\pmod{m_1}$, $x\equiv x_2\pmod{m_2}$, $y\equiv y_1\pmod{m_1}$ и $y\equiv y_2\pmod{m_2}$.

е) Если бы существовало решение в целых числах, то существовало бы и решение, где x и y – натуральные числа. Среди всех таких решений нашлось бы решение с наименьшей возможной величиной y. Поскольку

$$35^2-34\cdot6^2=35^2-(35-1)(35+1)=1,$$

то

$$x^2-34y^2=\left(x-y\sqrt{34}\right)\left(35+6\sqrt{34}\right)\left(35-6\sqrt{34}\right)\left(x+y\sqrt{34}\right)=$$
$$=\left(35x-204y-(35y-6x)\sqrt{34}\right)\left(35x-204y+(35y-6x)\sqrt{34}\right).$$

Докажем неравенства $35x-204y>0$, $35y-6x>0$ и $35y-6x<y$. Поскольку $\frac{3}{17}>\frac{35}{204}$, то достаточно доказать, что

$$\frac{6}{35}x<y<\frac{35}{204}x.$$

Первое совсем легко: если $\frac{6}{35}x\ge y$, то

$$-1=x^2-34y^2\ge\frac{35^2}{36}y^2-34y^2=\frac{y^2}{36}>-1,$$

что неверно. Второе неравенство доказать чуть сложнее. Если $y\ge\frac{35}{204}x$, то

$$x^2-34y^2\le\frac{204^2}{35^2}y^2-34y^2=\frac{-34y^2}{35^2}.$$

При $y\ge7$ противоречие очевидно: $\frac{34y^2}{35^2}>1$. А для каждого из значений $y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ и 6 легко проверить, что $34y^2-1$ не является квадратом целого числа.

35. а) $3a^2-2b^2=\left(a\sqrt3-b\sqrt2\right)\left(a\sqrt3+b\sqrt2\right)=$
$=\left(\sqrt3-\sqrt2\right)^{2001}\left(\sqrt3+\sqrt2\right)^{2001}=$
$=\left(\left(\sqrt3-\sqrt2\right)\left(\sqrt3+\sqrt2\right)\right)^{2001}=(3-2)^{2001}=1.$