

4. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ каждая клетка может быть либо живой, либо мертвой. Каждую минуту все живые клетки умирают, а те мертвые, которые граничат с нечетным числом живых (по стороне), оживают. Укажите все пары (m, n) , при которых жизнь в прямоугольнике может существовать вечно. (8)

А.Горбачев

5. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые направо, а остальные кругом. Всегда ли сержант может стать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом? (9)

А.Шаповалов

6. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$. (9)

В.Сендеров

7. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC в точках F и G . Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC . Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб. (9)

В.Жгун

8. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению $x^4 - 2y^2 = 1$. (9)

В.Сендеров

9. Остроугольный треугольник разрезали по прямой на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей – опять на две части, и т.д. Через несколько шагов все части оказались треугольниками. Могут ли все они быть тупоугольными? (9)

Г.Гальперин

10. Тангенсы углов треугольника – натуральные числа. Чему они могут быть равны? (10, 11)

А.Заславский

11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно.

Отрезки AE, AF и EF делят четырехугольник на 4 треугольника, площади которых равны (в каком-то порядке) последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD ? (10)

С.Шестаков

12. Все места в первом ряду кинотеатра заняты зрителями, купившими билеты в первый ряд, но при этом каждый сидит не на своем месте. Билетер может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места? (10, 11)

А.Шаповалов

13. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в белый и черный цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)? (10)

Г.Гальперин

14. Докажите, что на графике функции $y = x^3$ можно отметить такую точку A , а на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$ – такую точку B , что расстояние AB не превысит $1/100$. (11)

А.Спивак, А.Хачатурян

15. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих. Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны между собой. (11)

А.Шаповалов

16. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC ; O_A, O_B, O_C – центры вписанных окружностей треугольников $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ соответственно; T_A, T_B, T_C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_C T_B O_A T_C O_B$ равны. (11)

Л.Емельянов

Публикацию подготовили А.Спивак, Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. Из Анискино (A) в Борискино (B), расстояние между которыми 60 км, в 12⁰⁰ выехал и ехал с постоянной скоростью 10 км/ч велосипедист. Из B в A выехал и ехал с постоянной скоростью 30 км/ч автомобиль. Они встретились на одинаковом расстоянии от A и B . На каком расстоянии друг от друга они находились в 14⁰⁰; в 16⁰⁰?

С.Варламов

2. Ширина футбольных ворот $L = 5$ м. Вратарь массой $m = 80$ кг подпрыгнул и, зацепившись рукой, повис на

перекладине на расстоянии $l = 1$ м от правой штанги. Как изменилась разность сил давления перекладины ворот на правую и левую штанги?

С.Варламов

3. Школьник прочитал в газете «Советы домохозяйке» следующую заметку: «Для того чтобы рассортировать куриные яйца по степени свежести, возьмите четыре стеклянные банки, налейте в каждую пол-литра воды и растворите в первой банке 50 г соли, во второй 45 г, в третьей 30 г и в четвертой 15 г. После этого поочередно опускайте яйца в каждую банку. В первой банке будут тонуть только что снесенные яйца, во второй – снесенные не более двух недель назад, в третьей – снесенные не более пяти недель