

Задача 7. Пусть R и r – радиусы сфер, описанной около правильной n -угольной пирамиды и вписанной в нее, d – расстояние между их центрами. Докажите, что

$$а) d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}, \quad б) \frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

Решение. Воспользуемся теми же обозначениями и формулами, что и при решении предыдущих задач. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} h = 2R \sin^2 \alpha, \\ h = r \left(1 + \frac{1}{\cos \beta} \right), \\ \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства и получим

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right).$$

Из первых двух уравнений находим

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{2R}{2R - h}, \quad \frac{1}{\cos \beta} = \frac{h - r}{r}.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем квадратное уравнение относительно h :

$$h^2 - 2(R + r)h + 4Rr + \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 0, \quad (6)$$

откуда

$$h = R + r + \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

А так как расстояние d между центрами описанной и вписанной сфер равно $|NJ - NO| = |h - r - R|$, то

$$d = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}},$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Дискриминант уравнения (6) неотрицателен, следовательно,

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $d = 0$, т.е. центры сфер совпадают.

Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить аналогичное неравенство для радиуса описанной сферы и радиуса сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды?

Задача 8. Пусть R – радиус сферы, описанной около правильной n -угольной пирамиды, и R_1 – радиус сферы, касающейся всех ее ребер. Докажите, что

$$\frac{R}{R_1} \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right)$$

и представим ее в виде

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right).$$

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел a и b :

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$, где равенство имеет место только при $a = b$.

Получим

$$y = \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha \right) \leq \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2y}{\sin \frac{\pi}{n}} \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{n}},$$

или

$$\frac{R}{R_1} \geq 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha, \quad \text{или} \quad 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha = 1,$$

т.е. тогда, когда $n < 6$ и центры сфер совпадают (см. задачу

3). Для правильной треугольной пирамиды получаем $\frac{R}{R_1} \geq 3$,

для четырехугольной пирамиды $\frac{R}{R_1} \geq \sqrt{2}$ (равенство имеет

место при $\alpha = 45^\circ$). Для шестиугольной пирамиды и при

всех $n > 6$ имеем $\frac{R}{R_1} > 1$, т.е. $R > R_1$.

Из приведенных примеров видно, что решение связанных между собой задач упрощается, если задачи расположены в определенной последовательности так, что решение первых, более простых задач помогает отыскать решение последующих.

Предлагаем читателям для самостоятельного решения еще несколько задач о сфере, касающейся ребер правильной пирамиды.

Упражнения

1. Сторона основания правильной пирамиды равна a , боковое ребро равно b . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h . Двугранный угол при основании равен 60° . Найдите радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R_1 сферы, касающейся всех ее ребер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ . Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

4. Радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, в два раза больше радиуса сферы, касающейся всех ее ребер. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

5. В правильной n -угольной пирамиде центр O сферы, описанной около пирамиды, симметричен центру O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, относительно плоскости основания. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к основанию. Вычислите его при $n = 6$.