Решение. Воспользуемся формулой (3):

$$R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Далее находим

$$NO_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$NO_1 - h = \frac{h\cos\alpha\left(\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\alpha}, \text{ где } 0<\alpha<\frac{\pi}{n}.$$

Отсюда следует, что точки O_1 и H совпадают тогда и только тогда, когда $\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{n}$, или $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$. Точка O_1 лежит на высоте пирамиды, если $NO_1 < NH$, или

$$\cos\alpha < \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right), \text{ откуда } \alpha > \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}.$$

Наконец, если $\alpha < \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$, то точка O_1 лежит на продолжении высоты пирамиды NH, т.е. вне пирамиды.

В частности, для правильной треугольной пирамиды получаем $\alpha = \frac{\pi}{6}$, для четырехугольной пирамиды $\alpha = \frac{\pi}{4}$, для шестиугольной $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Элементарно-геометрическим способом нетрудно доказать, что в правильной n-угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают тогда и только тогда, когда плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна π. Могут ли в правильной n-угольной пирамиде совпадать центр описанной сферы и центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды? Решив следующую задачу, получим ответ на этот вопрос.

Задача 3. *Докажите, что расстояние d между центром O сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и центром O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, может быть выражено формулами*

$$а)\ d = \frac{|a-b|}{2\sin\alpha}, \qquad б)\ d = b\frac{\left|1-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha},$$

где a и b – длины сторон основания и бокового ребра пирамиды, α – угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Расстояние между центрами сфер равно $|NO_1 - NO|$. Из треугольника NO_1L (см. рис.3) находим

$$NL = b-\frac{a}{2},\quad NO_1 = \frac{2b-a}{2\sin\alpha}.$$

Из треугольника MNA_1 имеем

$$MN = 2R = \frac{b}{\sin\alpha}, \text{ откуда } R = \frac{b}{2\sin\alpha}.$$

Следовательно,

$$NO_1 - NO = NO_1 - R = \frac{b-a}{2\sin\alpha},$$

или

$$d = \frac{|a-b|}{2\sin\alpha}.$$

Чтобы вывести формулу б), найдем зависимость между величинами a и b. Имеем: $HA_1 = b\cos\alpha$, $a = 2HA_1\sin\frac{\pi}{n}$. Значит, $a = 2b\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha$. Подставив значение a в предыдущую формулу, получим

$$d = \frac{b\left|1-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha}.$$

Из формулы а) следует, что центры O и O_1 совпадают тогда и только тогда, когда $a = b$, т.е. когда все боковые грани пирамиды – равносторонние треугольники, что возможно лишь при $n < 6$.

Из формулы б) следует, что $d = 0$ лишь при условии

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha = 1, \text{ или } \cos\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Так как $\cos\alpha < 1$, то это возможно лишь при $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$.

Заметим, что если $n = 4$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$. При этом точки O, O_1 и H совпадают.

Итак, центры O и O_1 могут совпадать только тогда, когда правильная пирамида треугольная, четырехугольная или пятиугольная.

Задача 4. *Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде расстояние d между центрами сфер, описанной около пирамиды и касающейся всех ее ребер, выражается формулой*

$$d = \frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Пусть NH – высота правильной шестиугольной пирамиды, O – центр описанной около нее сферы, O_1 –

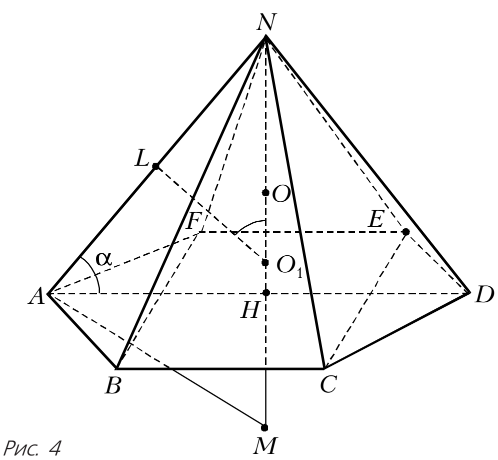

Рис. 4

центр сферы, касающейся всех ее ребер (рис.4). Воспользуемся результатом задачи 3 и получим

$$NO_1 - NO = \frac{b\left(1-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha\right)}{2\sin\alpha} = \frac{b(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то $NO_1 - NO > 0$. Это значит, что центр описанной сферы при любом значении α лежит между вершиной пирамиды и центром сферы, касающейся всех ее ребер.

Задача 5. *Радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, равен R. Радиус сферы, касающейся всех ее ребер, равен R_1. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, и расстояния от вершины пирамиды*