ры (рис.2). Если K, L, M – точки касания окружности со сторонами AB, BC и CA соответственно, то сфера с центром O и радиусом OK касается всех сторон треугольника ABC. Теперь нетрудно догадаться, что искомое множество точек есть перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, проходящий через точку O. Действительно, если S – точка, принадлежащая перпендикуляру m, то $SK = SL = SM$ как наклонные, имеющие на плоскости ABC равные проекции. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AB$, $SL \perp BC$, $SM \perp CA$. Значит, согласно теореме 1, сфера с центром O и радиусом SK касается всех сторон треугольника ABC. Если же некоторая точка Q не лежит на перпендикуляре m к плоскости ABC, то не все расстояния от точки Q до сторон AB, BC, CA равны (в силу теоремы о наклонных и их проекциях на плоскость), и потому точка Q не является центром сферы, касающейся всех сторон треугольника ABC.

Аналогично доказывается, что в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся всех сторон правильного многоугольника, также есть перпендикуляр к плоскости многоугольника, проходящий через его центр. Теперь дадим ответ на поставленный вопрос.

Теорема 2. *Для всякой правильной пирамиды всегда существует сфера, касающаяся всех ее ребер.*

Доказательство. Пусть $NA_1 \ldots A_n$ – правильная n-угольная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема, P – центр окружности, вписанной в грань NA_1A_2 (на рисунке 3 изображена лишь n-я часть пирамиды). Центр сферы, касающейся всех сторон правильного многоугольника $A_1 \ldots A_n$, лежит на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H. Множество центров сфер, касающихся сторон треугольника NA_1A_2, есть перпендикуляр m к плоскости NA_1A_2, проходящий через точку P. Прямые m и NH лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1. Это следует из того, что $A_1A_2 \perp NH$, $A_1A_2 \perp NK$, и, значит, по теореме о двух перпендикулярах, A_1A_2 – перпендикуляр к плоскости NKH. Поэтому плоскости NHK и NA_1A_2 перпендикулярны. Следовательно, прямая m лежит в плоскости NHK и пересекает прямую NH, поскольку угол NKH острый.

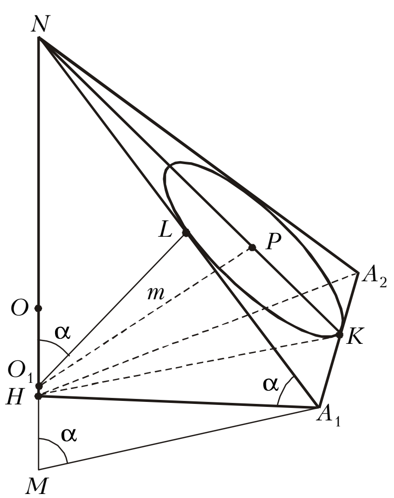

Рис. 3

Отсюда следует, что точка O_1 есть центр сферы, касающейся сторон основания пирамиды и боковых ребер NA_1 и NA_2. Радиус ее равен O_1K. Эта сфера касается и всех других ребер пирамиды, так как расстояния от точки O_1 до боковых ребер равны между собой.

Таким образом, всегда существует сфера, касающаяся всех ребер правильной пирамиды. При этом каждая грань пересекает сферу по окружности, вписанной в грань, а точки касания окружности с ребрами являются в то же время точками касания сферы и ребер. Центр сферы лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении. Отрезок, соединяющий центр O_1 сферы с точкой касания L ребра пирамиды и окружности, вписанной в грань, перпендикулярен ребру и равен радиусу сферы.

Рассмотрим несколько задач о сфере, касающейся всех ребер правильной пирамиды.

Задача 1. *Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды равно b, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.*

Решение. Воспользуемся прежними обозначениями и рисунком 3. Так как $A_1A_2 \ldots A_n$ – правильный многоугольник, то, полагая $A_1A_2 = a$, имеем $A_1L = A_1K = \frac{1}{2}a$, $LN = b - \frac{1}{2}a$ (отрезки A_1L и A_1K равны, как отрезки касательных к окружности, вписанной в грань NA_1A_2). Прямоугольные треугольники HA_1N и LO_1N имеют общий угол N, и потому $\angle LO_1N = \angle HA_1N = \alpha$. Обозначив радиус искомой сферы через R_1, находим

$$R_1 = LN \operatorname{ctg} \alpha = \left(b - \frac{1}{2}a\right) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$a = 2HA_1 \sin \frac{\pi}{n} = 2b \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что

$$R_1 = b \operatorname{ctg} \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right). \qquad (1)$$

В приведенном примере данные элементы b и α принадлежали одному прямоугольному треугольнику. Поэтому имелась возможность вычислять промежуточные неизвестные величины одну за другой. В более сложных случаях приходится прибегать к введению вспомогательных неизвестных.

Пользуясь формулой (1), легко получить другие формулы для вычисления радиуса R_1 сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Продолжим высоту NH пирамиды за точку H до пересечения с описанной около пирамиды сферой в точке M (см. рис.3). Тогда MN – диаметр сферы, а также диаметр окружности, описанной около треугольника A_1MN. Поэтому $\angle MA_1N = 90^\circ$, $A_1H \perp MN$, $\angle NMA_1 = \angle NA_1H = \alpha$. Если R – радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, то $MN = 2R$. Из треугольника A_1MN следует, что $b = 2R \sin \alpha$, и поэтому

$$R_1 = 2R \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right). \qquad (2)$$

Обозначим высоту NH пирамиды через h. Из треугольника NA_1H имеем $b = \frac{h}{\sin \alpha}$. Следовательно,

$$R_1 = \frac{h \cos \alpha \left(1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \alpha\right)}{\sin^2 \alpha}. \qquad (3)$$

Центр сферы, вписанной в пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды. Центр же описанной сферы может лежать как на высоте, так и на продолжении высоты вне пирамиды. Пользуясь рисунком 3, легко сравнить отрезки NH и MH. Если $\alpha = 45^\circ$, то центр O описанной сферы совпадает с центром основания H. При $\alpha > 45^\circ$ центр O лежит на высоте пирамиды, так как $NH > MH$, а при $\alpha < 45^\circ$ – на продолжении высоты NH за точку H ($NH < MH$).

Выясним, где расположен центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Задача 2. *Высота правильной n-угольной пирамиды равна h, угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α. На каком расстоянии от плоскости основания находится центр O_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды?*