



Рис. 3

площадь этого же треугольника, если точки P и A лежат по разные стороны от BC .)

Лемма. Если точка P прямой AB обладает тем свойством, что $\overline{AP} = \lambda \overline{AB}$, то для любой точки O имеем

$$\overline{OP} = (1 - \lambda) \overline{OA} + \lambda \overline{OB}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + \lambda \overline{AB} = \overline{OA} + \lambda (\overline{OB} - \overline{OA}) = \\ &= (1 - \lambda) \overline{OA} + \lambda \overline{OB}. \end{aligned}$$

Теорема. Если $(x; y; z)$ – барицентрические координаты точки P плоскости ABC относительно треугольника ABC , то

$$x + y + z = 1$$

и для любой точки O пространства

$$\overline{OP} = x \overline{OA} + y \overline{OB} + z \overline{OC}.$$

Доказательство. Во-первых,

$$\begin{aligned} x + y + z &= \\ &= \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1. \end{aligned}$$

Во-вторых, обозначив буквой K точку пересечения прямой CP с прямой AB (случай параллельности прямых CP и AB легко разобрать отдельно), имеем

$$\overline{AK} : \overline{KB} = y : x$$

(случай $x = 0$ рассмотрите отдельно), так что в силу леммы

$$\overline{OK} = \frac{x}{x+y} \overline{OA} + \frac{y}{x+y} \overline{OB}$$

(случай $x + y = 0$ соответствует уже выделенной нами ситуации $CP \parallel AB$). Поскольку

$$\overline{CP} = \frac{S_{CAPB}}{S_{ABC}} \overline{CK} = (x + y) \overline{CK},$$

то в силу леммы

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= (1 - x - y) \overline{OC} + (x + y) \overline{OK} = z \overline{OC} + \\ &+ (x + y) \left(\frac{x}{x+y} \overline{OA} + \frac{y}{x+y} \overline{OB} \right) = x \overline{OA} + y \overline{OB} + z \overline{OC}. \end{aligned}$$

Теперь мы готовы заняться вычислением барицентрических координат $(x; y; z)$ точек P_1 , P_2 и P_3 относительно треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ и $A_3A_4A_5$ соответственно. (Заметьте: поскольку при винтовом вращении точки P_1 , A_1 , A_2 и A_3 переходят в точки P_2 , A_2 , A_3 и A_4 соответственно, а при повторном винтовом движении – в точки P_3 , A_3 , A_4 и A_5 , то мы не ошиблись, выписав только один набор барицентрических координат, а не три.) По теореме имеем

$$\begin{aligned} \overline{A_1P_1} &= y \overline{A_1A_2} + z \overline{A_1A_3}, \\ \overline{A_1P_2} &= x \overline{A_1A_2} + y \overline{A_1A_3} + z \overline{A_1A_4}, \\ \overline{A_1P_3} &= x \overline{A_1A_3} + y \overline{A_1A_4} + z \overline{A_1A_5}. \end{aligned}$$

Поскольку $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3}$, то

$$\begin{aligned} x \overline{A_1A_2} + y \overline{A_1A_3} + z \overline{A_1A_4} - (y \overline{A_1A_2} + z \overline{A_1A_3}) = \\ = x \overline{A_1A_3} + y \overline{A_1A_4} + z \overline{A_1A_5} - (x \overline{A_1A_2} + y \overline{A_1A_3} + z \overline{A_1A_4}), \end{aligned}$$

откуда

$$(2x - y) \overline{A_1A_2} + (2y - z - x) \overline{A_1A_3} + (2z - y) \overline{A_1A_4} = z \overline{A_1A_5}.$$

Так как

$$\overline{A_1A_5} = \frac{2}{3} (\overline{A_1A_2} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_1A_4}),$$

то

$$\begin{cases} 2x - y = \frac{2}{3}z, \\ 2y - z - x = \frac{2}{3}z, \\ 2z - y = \frac{2}{3}z. \end{cases}$$

Добавляя к этим уравнениям известное нам равенство

$$x + y + z = 1,$$

получаем систему из четырех уравнений с тремя неизвестными. Решая ее, находим ответ: $x = 0,3$, $y = 0,4$ и $z = 0,3$.

Вернемся к нашей оси l . Прямая l равноудалена от точек A_1 , A_2 , A_3 , ... На какое расстояние? Конечно, если не знать длину ребра исходного правильного тетраэдра, то ответить на этот вопрос невозможно. Пусть для определенности $A_1A_2 = 1$. Обозначим для краткости $A_1A_2 = \vec{a}$, $A_1A_3 = \vec{b}$, $A_1A_4 = \vec{c}$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1, \\ \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для любой точки M прямой P_1P_2 существует такое число t , что

$$\overline{P_1M} = t \overline{P_1P_2}.$$

В силу леммы

$$\begin{aligned} \overline{A_1M} &= (1 - t) \overline{A_1P_1} + t \overline{A_1P_2} = \\ &= (1 - t) (0, 4\vec{a} + 0, 3\vec{b}) + t (0, 3\vec{a} + 0, 4\vec{b} + 0, 3\vec{c}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_1M^2 = \overline{A_1M}^2 &= ((0, 4 - 0, 1t)\vec{a} + (0, 3 + 0, 1t)\vec{b} + 0, 3t\vec{c})^2 = \\ &= (0, 4 - 0, 1t)^2 + (0, 3 + 0, 1t)^2 + 0, 09t^2 + \\ &+ (0, 4 - 0, 1t)(0, 3 + 0, 1t) + (0, 3 + 0, 1t) \cdot 0, 3t + 0, 3t(0, 4 - 0, 1t), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 100A_1M^2 &= (4 - t)^2 + \\ &+ (3 + t)^2 + 9t^2 + (4 - t)(3 + t) + 3t(3 + t) + 3t(4 - t). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, получаем в правой части квадратный трехчлен

$$10t^2 + 20t + 37 = 10(t + 1)^2 + 27 \geq 27,$$

причем при $t = -1$ достигается равенство. Таким образом, расстояние от точки A_1 до прямой l – т.е. минимальное значение расстояния A_1M – равно $\sqrt{\frac{27}{100}} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$.