Прямоугольник, вписанный в окружность

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Четырехугольники, вписанные в окружность, хорошо изучены со времен Древней Греции, и о них достаточно много говорено. Поэтому, на первый взгляд, такая их частная разновидность, как вписанный в окружность прямоугольник, едва ли заслуживает серьезного внимания. Тем не менее более пристальное изучение свойств прямоугольника, вписанного в окружность, дарит много находок и неожиданностей, обнаруживает полезные зависимости и закономерности. В результате работы с данной конфигурацией сложилась подборка задач, которую мы выносим на суд читателей.

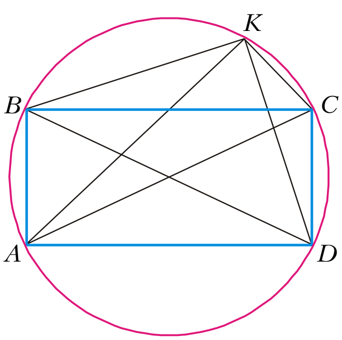

Рис. 1

Задача 1. *Докажите, что для любой точки K, лежащей на описанной около прямоугольника ABCD окружности, сумма* $AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2$ *есть величина постоянная. Найдите значение этой суммы, если радиус окружности равен R.*

Решение. Из прямоугольных треугольников BKD и AKC (рис.1) видно, что $BK^2 + DK^2 = BD^2$ и $AK^2 + CK^2 = AC^2$. Тогда

$$AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = BD^2 + AC^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2.$$

Но R постоянно, а значит, и требуемая сумма постоянна и равна $8R^2$.

Задача 2. *Через вершины вписанного в окружность прямоугольника площади S проведены касательные к этой окружности. Докажите, что образовавшийся четырехугольник – ромб. Докажите также, что площадь ромба не меньше 2S.*

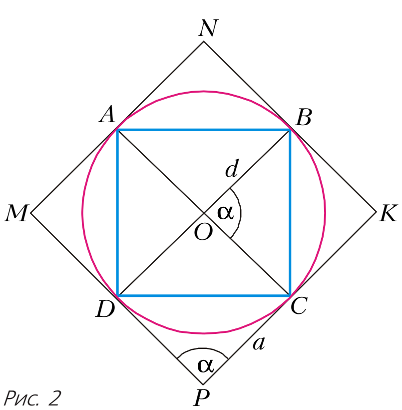

Рис. 2

Решение. Пусть после проведения касательных образовался четырехугольник $MNKP$ (рис.2).

Поскольку $MN \parallel KP$ ($MN \perp AC$ и $KP \perp AC$) и $MP \parallel KN$ ($MP \perp BD$ и $KN \perp BD$), то $MNKP$ – параллелограмм. Но параллелограмм с равными высотами ($AC = BD = 2R = d$) является ромбом.

Пусть сторона ромба $MN = a$ и $AC = BD = d$. Очевидно, что $a \ge d$. Тогда и $a^2 \sin\alpha \ge d^2 \sin\alpha$ ($\angle BOC = \angle MPK = \alpha$), или $S_{\text{ромба}} \ge 2S_{\text{прям}}$, что и требовалось доказать.

Задача 3. *Биссектрисы углов A и C вписанного прямоугольника ABCD пересекают окружность в точках E и F соответственно, O – центр окружности. Докажите, что точки E, O, F лежат на одной прямой (рис.3).*

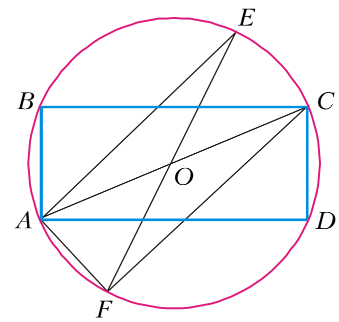

Рис. 3

Решение. Заметим, что $\angle FAD = \angle FCD = 45^\circ$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу), $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, а это значит, что EF– диаметр, т.е. EF содержит точку O.

Задача 4. *Из точки K, лежащей на описанной около прямоугольника ABCD окружности, опустили перпендикуляры KM и KN на диагонали BD и AC соответственно. Докажите, что величина угла MKN, а также длина отрезка MN не зависят от положения точки K.*

Решение. Заметим, что $\alpha = 180^\circ - \beta$ (рис.4), но величина β не меняется, а значит, и $\alpha = \text{const}$. Далее, OK– диаметр окружности, описанной около четырехугольника $KMON$. Тогда по теореме синусов для треугольника KMN получаем $m = OK \sin\alpha$. Но OK – радиус большой окружности – величина постоянная. Поскольку и $\alpha = \text{const}$, то тем самым доказано постоянство отрезка m.

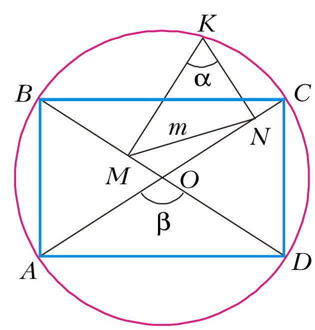

Рис. 4

Задача 5. *Из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, который имеет а) наибольшую площадь; б) наибольший периметр.*

Решение. Пусть S – площадь прямоугольника.

а) $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha \le \frac{1}{2}d^2$ (так как $\sin\alpha \le 1$) (рис.5), а равенство достигается, когда $\sin\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 90^\circ$. Значит, искомый прямоугольник – квадрат.

б) Из неравенства $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (среднее квадратичное не меньше среднего арифметического) имеем $a + b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} = 2R\sqrt{2}$ (см. рис.5), где $a + b$ – полупериметр прямоугольника $ABCD$. Знак равенства достигается при $a = b$. Следовательно, наибольший периметр также имеет квадрат.

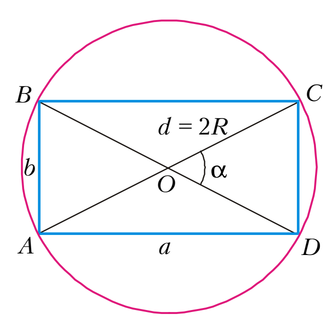

Рис. 5

Задача 6. *Восстановите вписанный в данную окружность прямоугольник по двум точкам M и N, принадлежащим смежным сторонам прямоугольника.*