Самосовмещения

На рисунке 1 слева все буквы латинского алфавита выписаны в пять строк. Справа по тому же правилу выписаны буквы русского алфавита. Что же это за правило?

AMTUVWY	АДЛМПТШ
BCDEK	ВЕЗКСЭЮ
HIOX	ЖНОФХ
NSZ	И
FGJLPQR	БГЁЙРУЦЧЩЪЫЬЯ

Рис. 1

Буквы первой строки имеют вертикальную ось симметрии. Второй – горизонтальную. Третьей – и вертикальную, и горизонтальную оси симметрии, а также центр симметрии. Буквы четвертой строки имеют только центр симметрии. Наконец, буквы последней строки не имеют ни осей, ни центров симметрии.

Впрочем, классификация букв по тому, какими симметриями они обладают, вряд ли интересна для филолога. А вот геометр привык к такой классификации выпуклых четырехугольников. Скорее всего, вы знакомы с ней. Напомню ее, указав в каждом случае группу самосовмещений фигуры: неправильный четырехугольник (рис.2, $\{id\}$); паралле-

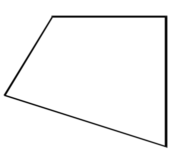

Рис. 2

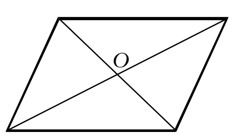

Рис. 3

лограмм[1] (рис.3, $\left\{id, R_O^{180^\circ}\right\}$); дельтоид (рис.4, $\left\{id, S_{AC}\right\}$); равнобокая трапеция (рис.5, $\left\{id, S_n\right\}$); прямоугольник[2] (рис. 6, $\left\{id, R_O^{180^\circ}, S_n, S_m\right\}$); ромб (рис.7, $\left\{id, R_O^{180^\circ}, S_{AC}, S_{BD}\right\}$); квадрат (рис. 8, $\left\{id, R_O^{90^\circ}, R_O^{180^\circ}, R_O^{270^\circ},\right.$

[1] Не являющийся ромбом!

[2] Не являющийся квадратом!

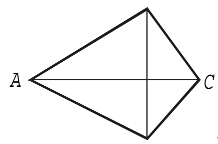

Рис. 4

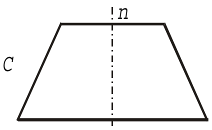

Рис. 5

$\left.S_{AC}, S_{BD}, S_n, S_m\right\}$). Здесь использованы общепринятые обозначения: id – тождественное отобра-

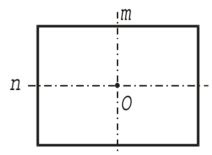

Рис. 6

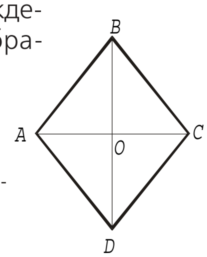

Рис. 7

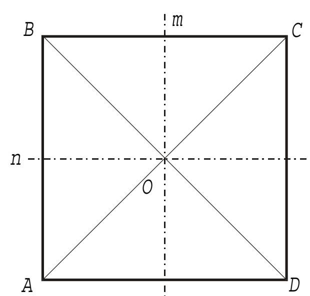

Рис. 8

жение, т.е. отображение, которое оставляет все точки фигуры на месте; R_O^φ – поворот вокруг точки O на угол φ против часовой стрелки; S_n – симметрия относительно прямой n.

Треугольники тоже классифицируют в зависимости от того, какова группа самосовмещений: неправильный треугольник (рис.9, $\{id\}$); равнобедренный неравносторонний треугольник (рис.10, $\left\{id, S_n\right\}$); рав-

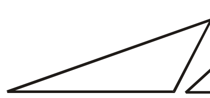

Рис. 9

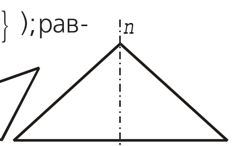

Рис. 10

носторонний треугольник (рис.11, $\left\{id, R_O^{120^\circ}, R_O^{240^\circ}, S_a, S_b, S_c\right\}$).

Впрочем, я забыл сказать, что такое самосовмещение. Это отображение, сохраняющее расстояния. Точнее говоря, для любых

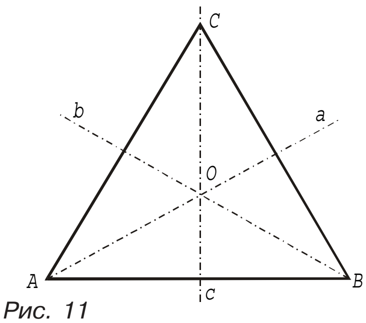

Рис. 11

двух точек X и Y фигуры расстояние между их образами X' и Y' должно быть равно расстоянию между исходными точками:

$$X'Y' = XY .$$

Разумеется, вершины многоугольника при самосовмещении переходят в вершины, так что можно следить только за перестановкой вершин.

Задачи

1. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?

2. 11 точек расположены на плоскости симметрично относительно прямых n и m. Обязана ли одна из этих точек быть точкой пересечения прямых n и m?

3. Придумайте фигуру, которая выдерживает поворот на 90°, но не имеет ни одной оси симметрии.

Ответы и указания к этим и следующим задачам вы найдете в конце журнала.

Перейдем от плоскости к пространству. Повернем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой AC_1 на 120°, как показано на рисунке 12. Тогда точка B перейдет в точку A_1, которая перейдет в D, которая, в свою очередь, перейдет в B. Аналогично, $B_1 \to D_1 \to C \to B_1$. Значит, прямая AC_1 – ось вращения куба.

Прямые BD_1, CA_1 и DB_1 тоже являются его осями вращения: поворот вокруг любой из них на 120° переводит куб в себя.

Есть у куба и оси симметрии. Например, прямая, проходящая через середины противоположных ребер AD и B_1C_1.