Точки / Прямые	A	B	C	D	E	F	G
L_1	×	×	×				
L_2			×	×	×		
L_3	×				×	×	
L_4	×			×			×
L_5		×			×		×
L_6							
L_7		×		×		×	

Рис. 17

Упражнение 2

а) В диаграмме на рисунке 17 строка, соответствующая прямой L_6, не заполнена. Определите, какие точки лежат на прямой L_6, и заполните эту строку.

б) Пользуясь диаграммой на рисунке 17, назовите прямые, пересекающиеся в точке E. Проверьте ответ, используя рисунок 10.

в) Составьте диаграммы для геометрий, представленных на рисунках 6 и 7.

В конечных геометриях используется хорошо знакомое определение параллельных прямых: прямые называют *параллельными*, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

В геометрии на рисунке 4 параллельных прямых нет – любые две прямые из трех имеющихся пересекаются. Нет параллельных прямых и на рисунках 5, 6, 10. (Контрольный вопрос: в какой точке на рисунке 10 пересекаются прямые, одна из которых проходит через точки F и D, а другая – через точки G и E?)

Геометрию, в которой нет параллельных прямых (т.е. любые две прямые пересекаются), называют *проективной геометрией*. В такой геометрии принимается следующая **аксиома А4–Р:** *любые две прямые или совпадают, или пересекаются.* (Здесь буква Р в обозначении – от слова *проективная*.)

Вспомним, как звучит соответствующая **аксиома А4–А** о параллельных из школьного учебника: *через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.* Такие геометрии называют *аффинными геометриями*. (От слова аффинная – вторая буква А в обозначении.)

Модель конечной аффинной геометрии представлена на рисунках 7, 8, 9, 11.

В *гиперболической геометрии* (или геометрии Лобачевского) принимается такая **аксиома А4–G:** *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, параллельных данной прямой.* Буква G в обозначении аксиомы – от слова *гиперболическая*. Конечные геометрии с такой аксиомой представлены на рисунках 12, 14, 15. Так, на рисунке 12 прямые BC и CD, проходящие через точку C, параллельны прямой AE.

Таким образом, в нашей воображаемой геометрии метро могут быть реализованы три различные геометрии: проективная, в которой выполнены условия **А1, А2, А3, А4–Р,** аффинная – с условиями **А1, А2, А3, А4–А,** гиперболическая – с аксиомами **А1, А2, А3, А4–G.**

Мы рассказали о различных примерах конечных геометрий и их моделях. При этом прямая была представлена либо некоторой линией, либо ребром многогранника, либо строкой таблицы. Опишем теперь построение *арифметической* модели, пригодной для интерпретации любой конечной геометрии. В этом случае *точками* будем называть различные простые числа, а *прямыми* – произведения некоторых из этих чисел.

Например, точки на рисунке 4 можно трактовать как числа 2, 3, 5, а прямые – как числа 6, 10, 15, равные их попарным произведениям.

Пусть точки на рисунке 6 – это числа 2, 3, 5, 7. Тогда прямые – это числа 14, 21, 35 и 30. На последней прямой 30 лежат три точки 2, 3 и 5 – произведение этих чисел как раз равно 30.

Рассмотрим в такой геометрии прямую b и точку a (здесь a – простое число, b –составное число, имеющее по аксиоме **А1** по крайней мере два простых сомножителя). Будем говорить, что *прямая b проходит через точку a*, если число a является делителем числа b. Ясно, что *прямые b и c пересекаются в точке a*, если НОД$(b, c) = a$, где НОД(b, c) – наибольший общий делитель чисел b и c. И наконец, *прямые b и c являются параллельными*, если НОД$(b, c) = 1$, т.е. b и c – взаимно простые числа.

Например, геометрия, представленная на рисунке 12 (или в таблице 13), может быть образована пятью точками – пятью простыми числами 2, 3, 5, 7, 11 и десятью прямыми – попарными произведениями этих простых чисел: $2\times3 = 6$; $2\times5 = 10$; $2\times7 = 14$; $2\times11 = 22$; $3\times5 = 15$; $3\times7 = 21$; $3\times11 = 33$; $5\times7 = 35$, $5\times11 = 55$; $7\times11 = 77$. Здесь прямые 22 и 21 параллельны, так как НОД(22, 21) = 1, а прямые 15 и 35 пересекаются в точке 5, ибо НОД(15,35) = 5.

Упражнение 3

а) Точки в геометрии на рисунке 12 отождествим с простыми числами 13, 17, 19, 31, 37. Укажите все прямые в этой геометрии. Через какие точки проходит прямая 527?

б) Пересекаются ли прямые 527 и 323?

в) Докажите, что прямые 527 и 481 параллельны.

г) Постройте арифметические модели всех рассмотренных выше геометрий и проверьте выполнение аксиом для некоторых элементов этих геометрий.

В заключение заметим, что в геометрии, изучаемой в школе, выполняются аксиомы **А1, А2, А3, А4–А**. Следовательно, школьная геометрия является аффинной. Она, как хорошо известно, не является конечной. Существуют также проективные и гиперболические геометрии, не являющиеся конечными.