которого сходится четное число ребер, можно правильно окрасить в черный и белый цвета. При этом окраска считается правильной, если каждые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета. [1]

Докажем эту лемму. Многогранник представляет собой карту, где странами в исходный момент являются его грани. Будем ходить по границам и вершинам этой карты. При этом, пройдя границу и оказавшись в некоторой вершине, мы пойдем дальше по любой другой границе, исходящей из этой вершины. Будем идти до тех пор, пока не попадем в вершину, в которой мы уже были, например в вершину A. Участок пути между выходом из вершины A и возвращением в нее представляет собой замкнутый несамопересекающийся контур; снимем его с карты. Тогда получим на поверхности многогранника несколько иную карту. При этом кратность каждой вершины либо не изменится (если контур не проходит через нее), либо уменьшится на 2, т.е. по-прежнему останется четной. Поэтому во вновь получившейся карте мы снова можем выделить некоторый несамопересекающийся замкнутый контур, который мы опять снимем. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всю карту (при этом процессе вершины многогранника постепенно перестают быть вершинами карты). Итак, исходная карта, все вершины которой имеют четную кратность, может быть получена последовательным наложением на поверхность многогранника контуров, каждый из которых разбивает ее на две части. При очередном наложении все страны в одной части сохраняют свои цвета, а в другой – цвет каждой страны меняется на противоположный.

Лемма 2. *Если грани выпуклого многогранника правильно окрашены в черный и белый цвета, то сумма периметров черных граней равна сумме периметров белых граней.*

Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что каждое ребро многогранника принадлежит одновременно как черной, так и белой его граням.

Теперь обратим взоры на многогранник, оговоренный условием задачи, и обозначим его через M. Согласно лемме 1, многогранник M можно правильно перекрасить в черный и белый цвета (не забывая при этом первоначальные цвета его граней).

Пусть оказалось, что все черные грани до того были синими, тогда суммарный периметр черных граней равен целому числу K. Суммарный периметр белых граней тоже K (лемма 2). При этом белые грани, которые были синими, имеют целочисленный суммарный периметр. Значит, белая грань, которая была красной, имеет периметр, равный целому числу.

В.Произволов

Ф1818. *На плоскости нарисован большой квадрат АБВГ со стороной d. За какое минимальное время точка может проехать по пути АБВГА, если ее максимальное ускорение по величине не может превышать a?*

При прохождении любого угла скорость точки должна падать до нуля – иначе ускорение при повороте станет бесконечно большим. Минимальное время прохождения отрезка d при нулевой начальной и нулевой конечной скоростях получится в том случае, если половину пути точка ускоряется с максимально возможным ускорением a, а половину пути замедляется с тем же по величине ускорением. Это время τ найдем из условия

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau}{2}\right)^2=\frac{d}{2}.$$

Тогда полное время будет равно

$$T=4\tau=8\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Однако в задаче не было явно сказано, что скорости точки при входе в квадрат и при выходе из него (там поворачивать не нужно!) равны нулю. В этом случае время τ_1 можно найти из условия

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2=d,$$

и полное время движения точки будет равно

$$T_1=2\tau_1+2\tau=\left(4+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{d}{a}}<T.$$

З.Рафаилов

Ф1819. *Тело массой $M = 10$ кг подвешено в лифте при помощи трех одинаковых легких веревок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие – к полу. Веревки натянуты так, что в покое натяжение каждой из нижних составляет $F_0 = 5$ Н. Найдите силу натяжения верхней веревки при ускорении лифта, равном $a_1 = 1$ м/с^2 и направленном вверх. То же – при величине ускорения лифта $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.*

Когда груз вместе с лифтом движется с направленным вверх ускорением a, то веревка сверху немного растягивается (ее натяжение F должно увеличиться), а нижние веревки на столько же укорачиваются – если еще остаются натянутыми. Обозначим жесткость одной веревки k и растяжение верхней веревки x. В состоянии покоя

$$F-Mg-2F_0=0.$$

При движении вверх с ускорением a

$$(F+kx)-Mg-(2F_0-2kx)=Ma.$$

Отсюда

$$kx=\frac{Ma}{3}.$$

Для $a_1=1$ м/с^2 натяжение верхней веревки равно

$$F_1=F+kx=Mg+2F_0+\frac{Ma_1}{3}=$$

$$=98\ \text{Н}+10\ \text{Н}+3{,}3\ \text{Н}\approx 111\ \text{Н}.$$

Натяжение каждой из нижних веревок при этом составляет $F_0-Ma_1/3\approx 1{,}7$ Н – они в этом случае натянуты. Для второго случая $a_2=2$ м/с^2 нижние веревки уже

---

[1] *Формулировка задачи несколько изменена, ибо первоначальная формулировка пока не получила своего решения.*