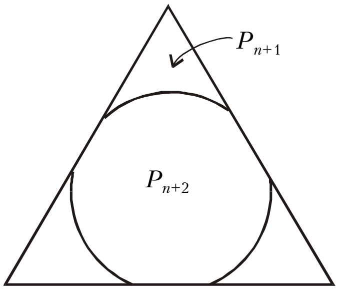

Рис.2

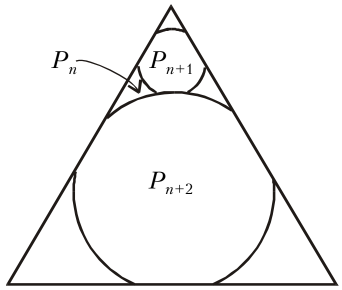

Рис.3

угольник разрезан на n многоугольников с числом сторон от 3 до $n + 2$.

Так как $(n + 2)$-угольник граничит с тремя сторонами исходного треугольника, $(n + 1)$-угольник может граничить только с двумя из них (рис.2). Следовательно, он должен граничить со всеми остальными многоугольниками. Аналогично, n-угольник может граничить лишь с одной стороной исходного треугольника (рис.3) и, значит, граничит со всеми остальными многоугольниками. Поэтому $(n-1)$-угольник граничит либо со всеми многоугольниками, либо с какой-то стороной исходного треугольника.

Таким образом, при $n > 4$ существует 5 областей, из которых любые две имеют общую границу: это либо 5 многоугольников с наибольшим числом сторон, либо 4 многоугольника с наибольшим числом сторон и внешняя по отношению к исходному треугольнику область. Поскольку такие 5 областей существовать не могут, при $n > 4$ искомое разрезание невозможно. Пример разрезания с $n = 4$ приведен на рисунке 4. Аналогично строятся примеры для $n = 2$ или 3.

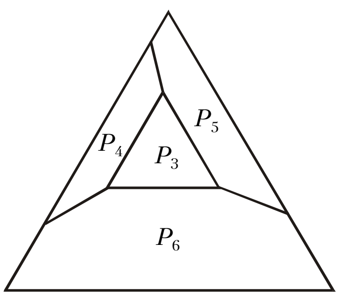

Рис.4

А.Заславский

М1808. *Решите в натуральных числах следующие уравнения:*

а) $x! + y! = z!!$;

б) $(x!)(y!) = z!!$

($z!!$ – произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа z и имеющих с ним одинаковую четность).

Всюду ниже $x \le y$.

а) Если число z нечетно, то $x = 1$ и $y = 2$ (при $y > 2$ числа $y!$ и $z!!$ делились бы на 3). Значит, либо $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, либо $z = 2m$. Очевидно, $(2m)!! = 2^m(m!)$.

Первый случай: $m \ge x$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$1 + \frac{y!}{x!} = 2^m\left(\frac{m!}{x!}\right).$$

Очевидно, $\frac{y!}{x!}$ равно 1 либо $x + 1$ (число $(x+1)(x+2)\ldots$ было бы четно). В первом случае $m = x = 1$, что дает решение $(1, 1, 2)$. Во втором случае $m = x$ (при $m > x$ число $x + 1$ было бы делителем 1). Следовательно, $y = m + 1$, и

$$m + 2 = 2^m. \qquad (*)$$

Второй случай: $m < x$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$\frac{x!}{m!} + \frac{y!}{m!} = 2^m.$$

Имеем: $x = m + 1$, поскольку числа $m + 1$ и $m + 2$ не могут одновременно быть степенями двойки. Далее, $y = m + 1$ либо $y = m + 2$. Действительно, при $y \ge m + 3$ нечетное число $1 + (m+2)(m+3)\ldots$ было бы степенью 2.

Получили: либо $2(m+1) = 2^m$, т.е.

$$m + 1 = 2^{m-1}, \qquad (**)$$

либо $(m+1) + (m+1)(m+2) = 2^m$, т.е. $(m+1)(m+3) = 2^m$. В этом случае $m + 1 = 2^\alpha$, $m + 3 = 2^\beta$, следовательно, $2^\beta - 2^\alpha = 2$, $2^\alpha\left(2^{\beta-\alpha} - 1\right) = 2$, $\alpha = 1$, $m = 1$. Но

$$(m+1)(m+3) = 8 \ne 2 = 2^m.$$

Таким образом, уравнение задачи свелось к $(*)$ и $(**)$. Рассмотрим уравнение $2^t = t + 2$. Функция $f(t) = 2^t - t - a$ при любом a имеет не более двух корней, поскольку $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1$ имеет единственный корень ($t = \log_2 \log_2 e$). При $a = 2$ один из корней отрицателен, поскольку $f(0) = -1$ и $f(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$. Положительный корень очевиден: $t = 2$.

Таким образом, $(*)$ дает $m = 2$, т.е. решение $(2, 3, 4)$.

Уравнение $(**)$ дает $m = 3$, т.е. решение $(4, 4, 6)$.

Ответ: $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 4)$, $(4, 4, 6)$.

б) Если $x > 1$ либо $y > 1$, то z четно. Таким образом, либо $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, либо $z = 2m$ и $z!! = 2^m(m!)$.

Лемма. *Число $m!$ не делится на 2^m (m – натуральное число).*

(Доказательство леммы приведем ниже.)

Докажем теперь, что $y > m$. Пусть $x \le m$. Тогда $y! = 2^m \cdot \frac{m!}{x!}$. Отсюда вследствие леммы $y > m$.

Имеем: $x!\left((m+1)\ldots y\right) = 2^m$. В правой, а значит, и в левой части этого равенства нет отличных от 1 нечетных множителей. Следовательно, $y = m + 1$, а x равен 1 либо 2. В первом случае $m + 1 = 2^m$, во втором $m + 1 = 2^{m-1}$.

Уравнение $2^t = t + 1$ имеет ровно 2 корня: $t = 0$ и $t = 1$, а уравнение $2^{t-1} = t + 1$ – корень $t = 3$ и второй корень, меньший 1 (см. пункт *а*)). Случай $t = 1$ дает решение $(1, 2, 2)$, а случай $t = 3$ – решение $(2, 4, 6)$.

Ответ: $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 4, 6)$, $(4, 2, 6)$.

Доказательство леммы.

Пусть α – степень, в которой 2 входит в разложение числа $n!$ на простые множители. Среди чисел 1, 2, 3, … …, n имеется $\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел, кратных 2, из них $\left[\frac{n}{4}\right]$ чисел, кратных 4, и т.д. Поэтому

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots$$