Поэтому для доказательства неравенства (1) достаточно показать, что

$$xy + xz + yz + 2\cdot 27\cdot 9 \geq xyz\,. \qquad (2)$$

Положим $\frac{8}{a^3} = A$, $\frac{8}{b^3} = B$, $\frac{8}{c^3} = C$, тогда (2) примет вид

$$(1+A)(1+B)+(1+A)(1+C)+$$
$$+\ (1+B)(1+C)+486 \geq (1+A)(1+B)(1+C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A+B+C+488 \geq ABC\,.$$

Но

$$A\cdot B\cdot C = \frac{8^3}{(abc)^3} = 8^3,$$

отсюда

$$A+B+C \geq 3\sqrt[3]{ABC} = 24\,,$$

и, значит,

$$A+B+C+488 \geq 512 = 8^3 = A\cdot B\cdot C\,.$$

Утверждение доказано.

М.Гарбер

М1805*. *В математической олимпиаде приняли участие двадцать один мальчик и двадцать одна девочка. Известно, что*

• *каждый из них решил не более шести задач;*

• *для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.*

Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы три мальчика и три девочки.

Исключим из рассмотрения задачи, которые никто не решил. Обозначим через A множество задач, каждую из которых решили не более двух мальчиков, а через $\bar{A}$ – остальные задачи олимпиады, т.е. решенные не менее чем тремя мальчиками. Аналогично для девочек определим множества B и $\bar{B}$. Если бы некоторый мальчик решил задачи только из B, то не более 12 девочек решили бы общие с ним задачи (хотя бы по одной), что противоречит условиям задачи. Значит, каждый мальчик решил хотя бы одну задачу из $\bar{B}$ и, тем самым, не более пяти задач из B. Поэтому у каждого мальчика не более чем с 10 девочками общие задачи из B и, следовательно, не менее чем с 11 девочками общие задачи только из $\bar{B}$ (если у некоторой девочки общие с ним задачи как из B, так и из $\bar{B}$, то она в число этих 11 девочек не входит). Для всех мальчиков мы получили множество M из не менее $21\cdot 11$ пар «мальчик–девочка» с общими задачами только из $\bar{B}$. Точно так же рассматривая девочек, получаем множество N из не менее $21\cdot 11$ пар «девочка–мальчик» с общими задачами только из $\bar{A}$. Всего пар «мальчик–девочка» $21\cdot 21$, следовательно, какая-то пара «мальчик–девочка» входит как в M, так и в N, т.е. у них есть общая решенная задача, входящая в множества $\bar{B}$ и $\bar{A}$. Это означает, что найденную задачу решили по крайней мере 3 девочки и по крайней мере 3 мальчика. Утверждение доказано.

С.Спиридонов

М1806. *Таблица чисел размером $n\times n$ такова, что любые n чисел, указанные по одному в каждой строке и в каждом столбце, дают всегда одинаковую сумму. В каждой строке таблицы определяется минимальное число, среди этих n чисел выделяется максимальное число M. В каждом столбце таблицы определяется максимальное число, среди них выделяется минимальное число m. Докажите, что $M = m$.*

Обозначим таблицу, оговоренную условием задачи, через A. Составим таблицу B, у которой все n строк будут одинаковыми и такими, какая первая строка у таблицы A. Затем, вычтя из таблицы A таблицу B, получим новую таблицу C, у которой в каждой строке будут стоять одинаковые числа (например, в первой – только нули), т.е. у таблицы C одинаковыми будут все столбцы. Таким образом, таблица A представлена как сумма двух специальных таблиц: $A = B + C$ (чуть подробнее об этом рассказано в решении задачи М1760 в «Кванте» №4 за 2001 г.).

К примеру,

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 4, & 5, & 6\\ 7, & 8, & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 1, & 2, & 3\\ 1, & 2, & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ 3, & 3, & 3\\ 6, & 6, & 6\end{pmatrix}.$$

Теперь легко сообразить, что M равно сумме минимального числа из таблицы B и максимального числа из таблицы C. Точно так же число m, в силу его определения, равно сумме максимального числа из таблицы C и минимального числа из таблицы B, т.е. $M = m$.

Сформулируем дополнительное утверждение. В каждой строке таблицы A выберем максимальное число, среди этих n чисел выберем минимальное число μ. Можно доказать (по той же схеме), что $M+\mu$ *равно сумме максимального и минимального чисел из таблицы A.*

В.Произволов

М1807. *При каких n можно разрезать треугольник на n выпуклых многоугольников с различным числом сторон?*

Основой решения является следующее утверждение: нельзя разрезать плоскость на 5 областей, из которых любые две имели бы общую границу (не точечную). Для его доказательства достаточно заметить, что если 4 области попарно граничат, то одна из них лежит в «кольце», образованном тремя остальными, как на рисунке 1, и, следовательно, пятая область не может граничить со всеми четырьмя.

Пусть k – наибольшее из чисел сторон многоугольников разбиения. Так как соответствующий многоугольник выпуклый, к границе треугольника примыкает не более трех его сторон. В силу выпуклости остальных $n-1$ многоугольников каждый из них граничит не более чем с одной стороной k-угольника. Следовательно, $k \leq n + 2$, и, значит, есть единственная возможность: тре-

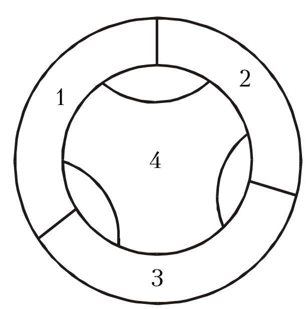

Рис.1