

чит свет и один раз – выключит. По окончании пути весь объект будет неосвещен.

б) Если раскрасить вершины в шахматном порядке, то сторож может перебраться в вершины того же цвета, что и левый нижний угол, и только в эти вершины. Почему?

Да потому что сторож может «пройти по диагонали», т.е. перебраться в единичном квадрате $ABCD$ из A в противоположную вершину C . Для этого достаточно пройти по пути $ABCDABC$, щелкая всеми встречающимися выключателями, кроме D . Умея «проходить по диагонали», сторож сможет пройти в любую вершину того же цвета, что и левый нижний угол.

И сторож не может перебраться в вершины другого цвета. Чтобы доказать это, докажем, что если сторожу удалось погасить весь свет, то он сделал четное число переходов по единичным коридорам. (Этого достаточно: так как каждый переход меняет цвет вершины, то после четного числа переходов цвет вернется к первоначальному.)

Будем считать, что каждый переключатель может находиться в положениях ВВЕРХ или ВНИЗ и что вначале все переключатели были ВНИЗ. Заметим, что на концах освещенного коридора положения переключателей различны. Сторож может выполнять элементарные действия двух видов: щелкать выключателем и переходить от выключателя к соседнему выключателю по освещенному коридору. После любого из таких действий он оказывается у противоположно направленного переключателя.

В полностью неосвещенном объекте все выключатели будут одинаково ориентированы: все ВВЕРХ или все ВНИЗ. Разберем оба случая. Если в конце все выключатели ВНИЗ, то сторож в сумме совершил четное число действий, так как начал и закончил у выключателя ВНИЗ. Поскольку он щелкнул каждым выключателем четное число раз, то общее число щелчков тоже четно. Значит, четно и число переходов.

Если же в конце все выключатели ВВЕРХ, то сторож сделал в сумме нечетное число действий. Но так как всего выключателей 81 (нечетное число!), причем каждым сторож щелкнул нечетное число раз, то общее число щелчков тоже нечетно. Значит, число переходов и в этом случае четно.

А. Шаповалов

M1803. В квадрате $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что $\angle PAQ = \angle QCP = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что суммарная площадь треугольников PAQ , PCB и QCD

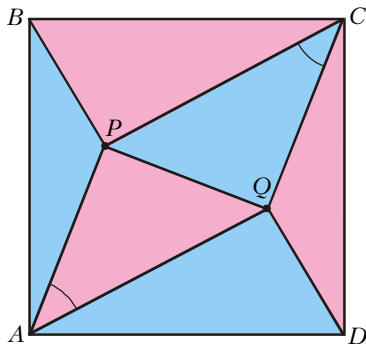


Рис.1

равна суммарной площади треугольников QCP , QAD и PAB .

Симметрично отразим $\triangle APB$ относительно прямой AP , а $\triangle AQD$ – относительно прямой AQ . При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Значит, суммарная площадь треугольников QCP , QAD и PAB равна пло-

щади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQM .

Симметрично отразим $\triangle CPB$ относительно прямой CP , а $\triangle CQD$ – относительно прямой CQ . При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N . Значит, суммарная площадь треугольников PAQ , PCB и QCD равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQN .

Остается заметить, что площади треугольников PQM и PQN равны, поскольку сами треугольники равны.

В.Произволов

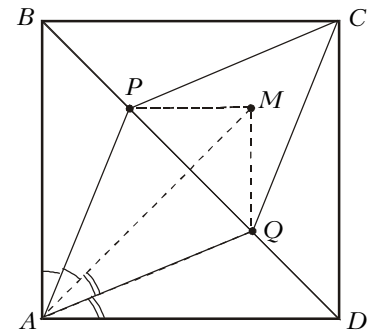


Рис.2

M1804. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

для любых положительных чисел a, b и c .

Так как выражение в левой части однородно относительно a, b и c (т.е. $f(a, b, c) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$), то мы можем считать, что $abc = 1$.

Из равенства $abc = 1$ следует, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8abc}{a^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{a^3}}}$$

Пусть

$$1 + \frac{8}{a^3} = x, \quad 1 + \frac{8}{b^3} = y, \quad 1 + \frac{8}{c^3} = z,$$

тогда нужно доказать неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geq 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \geq \sqrt{xyz} &\Leftrightarrow xy + xz + yz + \\ + 2\sqrt{x^2yz} + 2\sqrt{xy^2z} + 2\sqrt{xyz^2} \geq xyz &\Leftrightarrow xy + xz + yz + \\ + 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq xyz. &(1) \end{aligned}$$

Теперь, применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, находим

$$x = 1 + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^3} \geq 9 \sqrt[8]{1 \cdot \left(\frac{1}{a^3}\right)^8} = \frac{9}{a^{8/3}},$$

поэтому $\sqrt{x} \geq \frac{3}{a^{4/3}}$. Аналогично,

$$\sqrt{y} \geq \frac{3}{b^{4/3}}, \quad \sqrt{z} \geq \frac{3}{c^{4/3}},$$

следовательно,

$$\sqrt{xyz} \geq \frac{27}{(abc)^{4/3}} = 27$$

и

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{xyz}} \geq 3\sqrt[3]{27} = 9.$$