(Последнее неравенство следует из того, что наименьшему z отвечает и наименьшее t.) Если же $Yz - Xt \geq Y$, то $X \leq (Yz - Y)/t$ и

$$X^2 - dY^2 \leq \frac{Y^2(z-1)^2}{t^2} - dY^2 =$$

$$= Y^2 \frac{z^2 - 2z + 1 - dt^2}{t^2} = Y^2 \frac{2-2z}{t^2} \leq 0 .$$

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится в точности так, как доказательство теоремы 2.

Упражнения

34*. Докажите следующие утверждения. а) Для любого простого числа p существуют такие целые числа x и y, что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{p}$. б) Если p – нечетное простое число, n – натуральное, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на p^n, то существуют такие целые числа z и t, что $\left(x + p^n z\right)^2 - 34\left(y + p^n t\right)^2 + 1$ делится на p^{n+1}. в) Если $n > 2$ – натуральное число, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}, то число $\left(x + 2^{n-1}\right)^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^{n+1}. г) Если m_1 и m_2 – взаимно простые натуральные числа, для которых существуют такие целые числа x_1, y_1, x_2 и y_2, что $x_1^2 - 34y_1^2 \equiv -1 \pmod{m_1}$ и $x_2^2 - 34y_2^2 \equiv -1 \pmod{m_2}$, то существуют такие целые числа x и y, что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m_1 m_2}$. д) Для любого натурального m сравнение $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m}$ имеет решения в целых числах x и y. е) Уравнение $x^2 - 34y^2 = -1$ не имеет решений в целых числах.

Замечание. Ситуация, когда сравнения имеют решения, а уравнение не имеет, не столь уж редка. Например, для любого натурального числа m сравнение $(3x+1)(2x+1) \equiv 0 \pmod{m}$ имеет решения в целых числах, а уравнение $(3x+1)(2x+1) = 0$ не имеет целых решений. Тем интереснее знать, что 34 – наименьшее натуральное число d, для которого все сравнения вида $x^2 - dy^2 \equiv -1 \pmod{m}$ имеют решения, а уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ целочисленных решений не имеет. (Проверьте это!)

35. Докажите следующие утверждения. а) Если a, b – такие натуральные числа, что $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2001} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$, то $3a^2 - 2b^2 = 1$. б) Если a и b – такие натуральные числа, что $3a^2 - 2b^2 = 1$, то для некоторого нечетного натурального числа n имеем $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^n$.

36. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b, что $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a. б) Если $x < y$ – натуральные числа и $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$, то $x = \varphi_{2n-1}$ и $y = \varphi_{2n+1}$, где n – некоторое натуральное число. в) Если a, b и $c = \dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ – натуральные числа, то $c = 3$. г) Если два натуральных числа таковы, что увеличенный на единицу квадрат любого из них делится на другое, то произведение этих чисел на единицу больше квадрата их разности. д) Уравнение $x^2 - \left(n^2 - 4\right)y^2 = -4$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это. е) Уравнение $x^2 - \left(n^2 - 4\right)y^2 = -1$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это.

Указание. Воспользуйтесь утверждениями теоремы 10 и предыдущим пунктом.

37 (М1225). Докажите, что а*) если для натуральных чисел a и b число $\left(a^2 + b^2\right)/(ab - 1)$ натуральное, то оно равно 5; б) уравнение $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

38. Для любого натурального n число $\left[\left(3 + \sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}. Докажите это.

39. Для любого (не)четного натурального n число

$$\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] - 1 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$$

является (упятеренным) квадратом натурального числа. Докажите это.

40. а) Существуют такие иррациональные числа $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, что ни при каких натуральных m и n целые части чисел α^m и β^n не совпадают. Докажите это. б) Придумайте такую последовательность иррациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, что равенство $\left[\alpha_r^m\right] = \left[\alpha_s^n\right]$, где r, s, m и n – натуральные числа, верно лишь при $r = s$ и $m = n$.

Уравнение $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$

Разберем еще один пример. Он, возможно, покажется вам слишком специальным. Но, в конце концов, если уравнение $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ никак не заинтересовало вас и вы уверены, что оно не заинтересует вас никогда, то перейдите сразу к следующему разделу статьи.

К уравнению $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ можно прийти, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, **1001**, **2002**, **3003**, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

Коротко расскажем о числах сочетаний C_n^m тем, кто с ними еще не знаком. В n-й строке треугольника Паскаля на m-м месте стоит число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

причем нумерация чисел в каждой строке, как и нумерация самих строк, начинается с нуля. Основное правило образования треугольника Паскаля таково: *сумма любых двух соседних чисел некоторой строки равна числу следующей строки, которое расположено «ниже них и между ними»*; другими словами, для любых натуральных чисел m и m, где $m \leq n$, верно равенство

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m.$$

Очевидно, 1001 + 2002 = 3003. Это означает, что $C_{14}^4 + C_{14}^5 = C_{14}^6$. Последнее равенство можно записать в виде

$$C_{15}^5 = C_{14}^6.$$

И вообще, любое равенство вида $C_n^{m-2} + C_n^{m-1} = C_n^m$ можно записать в виде $C_{n+1}^{m-1} = C_n^m$.

Теорема 11. *Равенство $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = \varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и $y = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$, где k – некоторое натуральное число.*

Мы докажем это довольно неожиданное утверждение двумя способами. Первый заимствован из статьи А.Ширшова «Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$» («Квант» № 4 за 1977 год). Прежде всего выразим числа сочетаний