

(Последнее неравенство следует из того, что наименьшему  $z$  отвечает и наименьшее  $t$ .) Если же  $Yz - Xt \geq Y$ , то  $X \leq (Yz - Y)/t$  и

$$\begin{aligned} X^2 - dY^2 &\leq \frac{Y^2(z-1)^2}{t^2} - dY^2 = \\ &= Y^2 \frac{z^2 - 2z + 1 - dt^2}{t^2} = Y^2 \frac{2 - 2z}{t^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится в точности так, как доказательство теоремы 2.

### Упражнения

**34\***. Докажите следующие утверждения. а) Для любого простого числа  $p$  существуют такие целые числа  $x$  и  $y$ , что  $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . б) Если  $p$  – нечетное простое число,  $n$  – натуральное,  $x$  и  $y$  – такие целые числа, что  $x^2 - 34y^2 + 1$  делится на  $p^n$ , то существуют такие целые числа  $z$  и  $t$ , что  $(x + p^n z)^2 - 34(y + p^n t)^2 + 1$  делится на  $p^{n+1}$ . в) Если  $n > 2$  – натуральное число,  $x$  и  $y$  – такие целые числа, что  $x^2 - 34y^2 + 1$  делится на  $2^n$  и не делится на  $2^{n+1}$ , то число  $(x + 2^{n-1})^2 - 34y^2 + 1$  делится на  $2^{n+1}$ . г) Если  $m_1$  и  $m_2$  – взаимно простые натуральные числа, для которых существуют такие целые числа  $x_1, y_1, x_2$  и  $y_2$ , что  $x_1^2 - 34y_1^2 \equiv -1 \pmod{m_1}$  и  $x_2^2 - 34y_2^2 \equiv -1 \pmod{m_2}$ , то существуют такие целые числа  $x$  и  $y$ , что  $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m_1 m_2}$ . д) Для любого натурального  $m$  сравнение  $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m}$  имеет решения в целых числах  $x$  и  $y$ . е) Уравнение  $x^2 - 34y^2 = -1$  не имеет решений в целых числах.

*Замечание.* Ситуация, когда сравнения имеют решения, а уравнение не имеет, не столь уж редка. Например, для любого натурального числа  $m$  сравнение  $(3x + 1)(2x + 1) \equiv 0 \pmod{m}$  имеет решения в целых числах, а уравнение  $(3x + 1)(2x + 1) = 0$  не имеет целых решений. Тем интереснее знать, что  $34$  – наименьшее натуральное число  $d$ , для которого все сравнения вида  $x^2 - dy^2 \equiv -1 \pmod{m}$  имеют решения, а уравнение  $x^2 - dy^2 = -1$  целочисленных решений не имеет. (Проверьте это!)

**35.** Докажите следующие утверждения. а) Если  $a, b$  – такие натуральные числа, что  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2001} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$ , то  $3a^2 - 2b^2 = 1$ . б) Если  $a$  и  $b$  – такие натуральные числа, что  $3a^2 - 2b^2 = 1$ , то для некоторого нечетного натурального числа  $n$  имеем  $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n$ .

**36.** Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких пар натуральных чисел  $a$  и  $b$ , что  $a^2 + 1$  делится на  $b$ , а  $b^2 + 1$  делится на  $a$ . б) Если  $x < y$  – натуральные числа и  $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ , то  $x = \Phi_{2n-1}$  и  $y = \Phi_{2n+1}$ , где  $n$  – некоторое натуральное число. в) Если  $a, b$  и  $c = \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$  – натуральные числа, то  $c = 3$ . г) Если два натуральных числа таковы, что увеличенный на единицу квадрат любого из них делится на другое, то произведение этих чисел на единицу больше квадрата их разности. д) Уравнение  $x^2 - (n^2 - 4)y^2 = -4$  не имеет решений в натуральных числах при натуральном  $n \neq 3$ . Докажите это. е) Уравнение  $x^2 - (n^2 - 4)y^2 = -1$  не имеет решений в натуральных числах при натуральном  $n \neq 3$ . Докажите это.

*Указание.* Воспользуйтесь утверждениями теоремы 10 и предыдущим пунктом.

**37** (M1225). Докажите, что  $a^*$  если для натуральных чисел  $a$  и  $b$  число  $(a^2 + b^2)/(ab - 1)$  натуральное, то оно равно 5; б) уравнение  $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$  имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**38.** Для любого натурального  $n$  число  $\left[ (3 + \sqrt{11})^{2n-1} \right]$  делится на  $2^n$  и не делится на  $2^{n+1}$ . Докажите это.

**39.** Для любого (не)четного натурального  $n$  число

$$\left[ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - 1 = \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2$$

является (упятеренным) квадратом натурального числа. Докажите это.

**40.** а) Существуют такие иррациональные числа  $\alpha > 1$  и  $\beta > 1$ , что ни при каких натуральных  $m$  и  $n$  целые части чисел  $\alpha^m$  и  $\beta^n$  не совпадают. Докажите это. б) Придумайте такую последовательность иррациональных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ , что равенство  $[\alpha_r^m] = [\alpha_s^n]$ , где  $r, s, m$  и  $n$  – натуральные числа, верно лишь при  $r = s$  и  $m = n$ .

### Уравнение $C_x^{y-1} = C_x^y$

Разберем еще один пример. Он, возможно, покажется вам слишком специальным. Но, в конце концов, если уравнение  $C_x^{y-1} = C_x^y$  никак не заинтересовало вас и вы уверены, что оно не заинтересует вас никогда, то перейдите сразу к следующему разделу статьи.

К уравнению  $C_x^{y-1} = C_x^y$  можно прийти, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, **1001**, **2002**, **3003**, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

Коротко расскажем о числах сочетаний  $C_n^m$  тем, кто с ними еще не знаком. В  $n$ -й строке треугольника Паскаля на  $m$ -м месте стоит число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

причем нумерация чисел в каждой строке, как и нумерация самих строк, начинается с нуля. Основное правило образования треугольника Паскаля таково: *сумма любых двух соседних чисел некоторой строки равна числу следующей строки, которое расположено «ниже них и между ними»*; другими словами, для любых натуральных чисел  $m$  и  $n$ , где  $m \leq n$ , верно равенство

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m.$$

Очевидно,  $1001 + 2002 = 3003$ . Это означает, что  $C_{14}^4 + C_{14}^5 = C_{14}^6$ . Последнее равенство можно записать в виде

$$C_{15}^5 = C_{14}^6.$$

И вообще, любое равенство вида  $C_n^{m-2} + C_n^{m-1} = C_n^m$  можно записать в виде  $C_{n+1}^{m-1} = C_n^m$ .

**Теорема 11.** *Равенство  $C_x^{y-1} = C_x^y$  выполнено тогда и только тогда, когда  $x = \Phi_{2k}\Phi_{2k+1}$  и  $y = \Phi_{2k-1}\Phi_{2k}$ , где  $k$  – некоторое натуральное число.*

Мы докажем это довольно неожиданное утверждение двумя способами. Первый заимствован из статьи А. Ширшова «Об уравнении  $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$ » («Квант» № 4 за 1977 год). Прежде всего выразим числа сочетаний