щадей этих двух треугольников отличается от площади исходного треугольника менее чем на $1/2$. Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

32. Как известно, $1 + 2 = 3$. Легко проверить также, что $1 + 2 + 3 + \ldots + 13 + 14 = 105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$. Найдите все такие n, что сумма первых n натуральных чисел равна сумме нескольких последующих.

Теорема 3

Доказательство теоремы 3 похоже на доказательство теоремы 2. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 3x + 4y = X, \\ 2x + 3y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 3X - 4Y$ и $y = 3Y - 2X$, замечаем, что

$$x^2 - 2y^2 = (3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = X^2 - 2Y^2,$$

а затем формулируем и доказываем следующую лемму.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - 2Y^2 = 7$, и выполнено неравенство $Y \geq 6$, то $3X - 4Y$ и $3Y - 2X$ – тоже натуральные числа, причем $3X - 4Y < X$.*

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $3X - 4Y \leq 0$, то $X \leq \frac{4}{3}Y$ и $7 = X^2 - 2Y^2 \leq \frac{16}{9}Y^2 - 2Y^2 < 0$. Если $3Y - 2X \leq 0$, то $X \geq \frac{3}{2}Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq \frac{9}{4}Y^2 - 2Y^2 = \frac{Y^2}{4} > 7$. Наконец, если $3X - 4Y \geq X$, то $X \geq 2Y$ и $X^2 - 2Y^2 \geq 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 > 7$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится почти так же, как и доказательство теоремы 2. Чтобы понять, где может остановиться процесс образования пар-предшественниц, достаточно разобрать случаи $Y = 1, 2, 3, 4, 5$. Сделав это, вы найдете, как и следовало ожидать, два решения: $(3; 1)$ и $(5; 3)$.

Теорема 5

Доказательство теоремы 5 похоже на доказательства теорем 2 и 3. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = X, \\ x + 2y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 2X - 3Y$ и $y = 2Y - X$, замечаем, что

$$x^2 - 3y^2 = (2X - 3Y)^2 - 3(2Y - X)^2 = X^2 - 3Y^2,$$

а затем формулируем и не доказываем (надеясь на читателя) следующую лемму.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, причем $X^2 - 3Y^2 = 1$, то $2X - 3Y$ и $2Y - X$ – неотрицательные числа, причем $2Y - X < Y$.*

Окончание доказательства – как в теореме 2.

Теорема 7

Из системы

$$\begin{cases} x + y = X, \\ x = Y \end{cases}$$

находим $x = Y$ и $y = X - Y$. Очевидно,

$$x^2 - xy - y^2 = Y^2 - Y(X - Y) - (X - Y)^2 =$$
$$= Y^2 - XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = -\left(X^2 - XY - Y^2\right).$$

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$, то $X \geq Y$, причем равенство выполнено лишь в случае $X = Y = 1$.*

Доказательство. Как всегда, рассуждаем «от противного». Если $X < Y$, то $X^2 - XY - Y^2 < -Y^2 \leq -1$, что несовместимо с условием $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$. Если же $X = Y$, то $X^2 - XY - Y^2 = -X^2$. Очевидно, $-X^2$ не равняется 1, а $-X^2 = -1$ лишь при $X = 1$. Лемма доказана. Теперь читатель, надеемся, самостоятельно завершит доказательство теоремы 7.

Упражнение 33 (М39). а) Целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m – данное натуральное число, $m > 1$) тогда и только тогда, когда x и y – соседние члены последовательности $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = m$, $a_3 = m^2 - 1$, $a_4 = m^3 - 2m$, $a_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, …, в которой $a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k$ для всех $k \geq 0$. Докажите это. б) Рассмотрим случай $m = 3$. Очевидно, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, $a_4 = 3 \cdot 8 - 3 = 21$. Возникает гипотеза, что для любого n число a_n – это $(2n)$-й член последовательности Фибоначчи. Докажите эту гипотезу.

Теорема 9

Идея доказательства уже была применена нами четырежды. Применим же ее в пятый раз. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xz + dyt = X, \\ xt + yz = Y. \end{cases}$$

Чтобы найти x, домножим первое уравнение на z, второе – на dt и вычтем затем второе уравнение из первого:

$$zX - dtY = xz^2 - dxt^2 = x,$$

поскольку $z^2 - dt^2 = 1$. Аналогично, чтобы найти y, домножим первое уравнение на t, второе на z и вычтем второе уравнение из первого:

$$Xt - Yz = dyt^2 - yz^2,$$

откуда $y = Yz - Xt$.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - dY^2 = 1$, а z – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число t, что $z^2 - dt^2 = 1$, то $zX - dtY \geq 0$ и $Yz - Xt \geq 0$, причем $Yz - Xt < Y$.*

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $zX - dtY < 0$, то $X < \frac{dtY}{z}$ и, следовательно,

$$1 = X^2 - dY^2 < \left(\frac{dtY}{z}\right)^2 - dY^2 = dY^2\,\frac{dt^2 - z^2}{z^2} < 0.$$

Если $Yz - Xt < 0$, то

$$X^2 - dY^2 > \frac{Y^2 z^2}{t^2} - dY^2 = \frac{Y^2 z^2 - dY^2 t^2}{t^2} = \frac{Y^2}{t^2} \geq 1.$$