Уравнения Пелля

А. СПИВАК

В прошлом номере журнала были сформулированы, но не доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Уравнение $x^2-2y^2=\pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения (1; 0) при помощи правила $(x;y)\to(x+2y;x+y)$.*

Теорема 3. *Уравнение $x^2-2y^2=7$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений (3; 1) и (5; 3) при помощи правила $(x;y)\to(3x+4y;2x+3y)$.*

Теорема 5. *Уравнение $x^2-3y^2=1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения (1; 0) при помощи правила $(x;y)\to(2x+3y;x+2y)$.*

Теорема 7. *Уравнение $x^2-xy-y^2=\pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения (0; 1) при помощи правила $(x;y)\to(x+y;x)$.*

Можно было бы рассмотреть еще несколько примеров и сформулировать много аналогичных теорем, но пора переходить к более общим рассмотрениям.

Формула $\boldsymbol{(x^2-dy^2)(z^2-dt^2)=(xz+dyt)^2-d(xt+yz)^2}$

Следующее вычисление – пожалуй, самое главное в теории уравнений Пелля:

$$(x^2-dy^2)(z^2-dt^2)=x^2z^2-dy^2z^2-dx^2t^2+d^2y^2t^2=$$
$$=x^2z^2+2xzdyt+d^2y^2t^2-$$
$$-dy^2z^2-2dyzxt-dx^2t^2=(xz+dyt)^2-d(xt+yz)^2.$$

А вот как можно получить ту же формулу, если разложить разность квадратов на (иррациональные!) множители и переставить их разумным образом:

$$(x^2-dy^2)(z^2-dt^2)=$$
$$=(x+y\sqrt{d})(x-y\sqrt{d})(z+t\sqrt{d})(z-t\sqrt{d})=$$
$$=(x+y\sqrt{d})(z+t\sqrt{d})\cdot(x-y\sqrt{d})(z-t\sqrt{d})=$$
$$=(xz+dyt+(xt+yz)\sqrt{d})\cdot(xz+dyt-(xt+yz)\sqrt{d})=$$
$$=(xz+dyt)^2-d(xt+yz)^2.$$

Честно говоря, эта выкладка даже длиннее предыдущей. Но она, надеемся, гораздо прозрачнее. Зачем нам нужна доказанная формула? Чтобы строить из одних решений другие! Точнее говоря, формула доказывает следующую важную теорему.

Теорема 8. *Если $x^2-dy^2=a$ и $z^2-dt^2=b$, то пара чисел $(X;Y)=(xz+dyt;xt+yz)$ удовлетворяет равенству $X^2-dY^2=ab$.*

И опять сформулируем и не докажем теорему о том, как устроено множество решений уравнения Пелля.

Теорема 9. *Если a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2-db^2=1$, то уравнение $x^2-dy^2=1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения (1; 0) при помощи правила $(x;y)\to(ax+dby;bx+ay)$.*

Упражнения

21. Уравнение а) $x^2-2y^2=14$; б) $x^2-2y^2=23^{23}$ имеет бесконечно много решений в целых числах, а уравнение в) $|x^2-2y^2-1004|=1001$ не имеет ни одного. Докажите это.

22. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого представим в виде суммы квадратов 11 последовательных а) целых; б) натуральных чисел. в) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, квадрат каждого из которых представим в виде суммы квадратов 11 последовательных натуральных чисел.

23. Пусть a, b, x, y, z, t – рациональные числа, $x^2+ay^2+bz^2+abt^2=0$ и хотя бы одно из чисел x, y, z и t отлично от нуля. Докажите, что существуют такие рациональные числа u, v и w, что $u^2+av^2+bw^2=0$ и $u^2+v^2+w^2\neq 0$.

Теорема существования

Теорема 10. *Для любого натурального числа d, не являющегося квадратом, существуют такие натуральные числа x и y, что $x^2-dy^2=1$.*

Вместе взятые, теоремы 8, 9 и 10 позволяют довольно ясно представить себе структуру множества решений уравнения Пелля. В одном из ближайших номеров журнала мы изложим четыре доказательства теоремы 10. А здесь у нас хватит сил только на то, чтобы доказать теоремы 2, 3, 5, 7 и 9. Впрочем, мы это сделаем двумя способами: сначала обойдемся без помощи иррациональностей, а затем при помощи иррациональностей изложим (по сути то же самое) доказательство и даже расскажем о решениях в целых числах уравнения $x^2-dy^2=c$.

Упражнения

24. Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, $c\neq 0$ и уравнение $x^2-dy^2=c$ имеет хотя бы одно

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3.