Как найти сумму?

Л.ШИБАСОВ

Как найти сумму? Если речь идет о сложении двух или трех чисел – все ясно. Но часто нужно бывает найти сумму очень большого или вообще произвольного числа слагаемых, образующих некоторую последовательность. Эта задача уже не столь проста, и она привлекала внимание людей с глубокой древности, о чем сохранились легенды и письменные свидетельства.

В египетском папирусе, которому почти 4 тысячи лет, содержится записанная писцом Ахмесом задача-шутка: имеется 7 домов, в каждом доме 7 кошек, каждая кошка съедает 7 мышей, каждая мышь съедает 7 колосьев ячменя, из каждого колоса вырастает 7 мер ячменя. Найти сумму всех предметов. Решая задачу, Ахмес находит сумму пяти членов геометрической прогрессии.

О гораздо большем числе слагаемых, тоже образующих геометрическую прогрессию, идет речь в древней легенде об изобретении шахмат. Индийский царь Шерам, восхищенный этой игрой, решил отблагодарить ее изобретателя Сету и предложил тому любую награду. Сета попросил за первую клетку шахматной доски выдать ему одно пшеничное зерно, за вторую – два, за третью – 4, за четвертую – 8 и т.д. Царь приказал немедленно исполнить эту «смехотворную» просьбу. Каково же было его удивление, когда он узнал, что царедворцы не могут выполнить приказ своего повелителя. Ведь число зерен, причитавшихся изобретателю, так велико, что не только в царских кладовых, но и на всей Земле не нашлось бы такого количества зерна.

В более поздний период стали находить суммы слагаемых, устроенных посложнее. В XIV веке индийский математик Нарайана решил такую задачу: найти число коров и телок, появившихся от одной коровы за 20 лет, при условии, что корова в начале каждого года приносит телку, а телка дает такое же потомство в начале года, достигнув трех лет. Как он это сделал, мы узнаем позже.

Надо сказать, что вычисление сумм с древних времен носило не только занимательный характер. Оно служило и практическим целям. Еще задолго до нашей эры Архимед, применяя суммирование, нашел площадь параболического сегмента и объемы некоторых тел вращения. Этим же методом находили площади и объемы вплоть до XVII века, когда были созданы интегральное и дифференциальное исчисления, позволившие свести задачи вычисления мер к нахождению первообразной и применению формулы Ньютона–Лейбница. Но и сейчас вычисление сумм используется для решения различных задач интегрального исчисления. Это не единственная область математики, где нужны суммы. Широко применяются они в теории рядов, в различного рода приближенных вычислениях и, конечно, в теории чисел.

Теперь, когда, надеемся, читатели убедились в древности и важности проблемы суммирования, обратимся к конкретным задачам такого рода. Начнем с простой геометрической задачи.

Пример 1. На плоскости расположены две касающиеся друг друга внешним образом окружности единичного радиуса. К ним проведена внешняя касательная. В фигуру, заключенную между окружностями и касательной, вписывается круг, затем в образовавшуюся фигуру между данными окружностями и первым кругом вписывается второй круг и т.д. (рис.1). Спрашивается, какова суммарная длина диаметров вписанных кругов, полученных на n-м шаге.

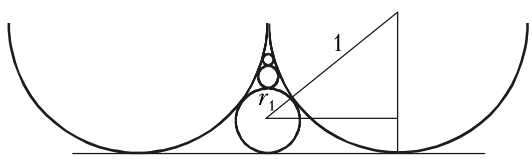

Рис. 1

Упражнение 1. Покажите, что диаметр k-го вписанного круга равен $\frac{1}{k(k+1)}$.

Итак, чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти сумму

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Для ее вычисления обратимся к равенству $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Применяя его к каждому слагаемому суммы, получаем ответ:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вообще говоря, найти компактную формулу, выражающую сумму n слагаемых (или, как говорят в математике, «записать результат в конечном виде»), удается очень редко. В школе выводят две формулы такого типа: для арифметической прогрессии

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+(n-1)d) = \frac{2a+(n-1)d}{2}n$$

и для геометрической прогрессии

$$S_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} = b\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Мы рассмотрим примеры вычисления более сложных сумм. При этом мы будем считать слагаемые значениями некоторой функции $f(x)$ в точках $x = 1, 2, \ldots, n$, а возникающую сумму $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ записывать в виде $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ (читается: «сумма чисел $f(k)$ по k от 1 до n»). В этих обозначениях результат примера 1 будет выглядеть так:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Решение оказалось очень простым за счет того, что по функции $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ мы сумели найти другую функцию $F(x)=-\frac{1}{x}$, так что выполняется равенство

$$f(k)=F(k+1)-F(k)=\Delta F(k). \qquad (1)$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=F(n+1)-F(1). \qquad (2)$$

Не правда ли, (1) напоминает формулу дифференцирования функции $F(x)$, а (2) – интегрирования функции $f(x)$, знакомые читателям из школьного курса математического анализа? Но если в математическом анализе приращение аргумента устремляют к нулю, то здесь оно равно единице и все время остается постоянным. Поэтому мы не можем воспользоваться известными из анализа правилами вычисления первообразной, пример 1 это наглядно подтверждает. Поиск по функции $f(x)$ ее «первообразной» $F(x)$ здесь уже нелегкая проблема, в каждом конкретном примере она решается индивидуально, и не всегда успешно. Тем интереснее случаи, когда удается найти решение.

Пример 2. Обобщим сумму, возникшую в примере 1. В качестве $f(x)$ возьмем функцию $\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+m)}$.

Упражнение 2. Покажите, что в этом случае

$$F(x)=\frac{-1}{mx(x+1)\ldots(x+m-1)}.$$

На основании равенства (2) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)\ldots(n+m)}\right). \qquad (3)$$

Здесь $m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$ (читается: «m факториал»).

Такую сумму рассматривал немецкий математик Г.Лейбниц, когда в юности начал серьезно изучать математику. Правда, он находил сумму бесконечной последовательности слагаемых, т.е. сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+m)}.$$

Эту задачу в числе других поставил перед ним Х.Гюйгенс, к которому Лейбниц обратился с просьбой помочь ему ликвидировать, как он выразился, его «математическое невежество». Мы можем найти решение задачи Гюйгенса, устремив в равенстве (3) n к бесконечности. Сумма ряда равна числу $S=(m\cdot m!)^{-1}$. Заметим, что Лейбниц не только быстро, но и столь успешно ликвидировал свое «математическое невежество», что сумел в течение десяти лет создать ни много ни мало новую область математики – дифференциальное и интегральное исчисление.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x)=x^m$. Обозначим

$$S_n^m=1^m+2^m+\ldots+n^m$$

и вычислим эту сумму для некоторых показателей m.

При $m=1$ имеем $f(x)=x$, $F(x)=x(x-1)/2$, и мы приходим к известной формуле

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что при $m=2$, т.е. для $f(x)=x^2$, соответствующая функция $F(x)=x(x-1)(2x-1)/6$, а для функции $f(x)=x^3$ (т.е. при $m=3$) имеем $F(x)=x^2(x-1)^2/4$.

Отсюда находим

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad S_n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Заметим, что в правой части последней формулы записан квадрат суммы S_n^1, поэтому возникает легко запоминающаяся формула

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2. \qquad (4)$$

Она была известна еще в Древней Греции. Но из-за отсутствия в то время алгебраической символики выводилась она геометрически. Древнегреческие математики для доказательства различных числовых свойств использовали изображение чисел при помощи камешков или точек на песке.

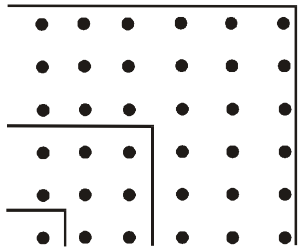

Рис. 2

Решая одну задачу (см. упражнение 17,г), Никомах (I в.) расположил точки в виде квадрата, сторона которого содержит 1 + 2 + 3 + … + n точек (рис.2). В этом квадрате он выделил угловую точку, за ней квадрат из 9 точек, потом из 36 точек и т.д. Полученные Г-образные фигуры греки называли гномонами[1]. Никомах показал, что из точек гномона с основанием k можно сложить куб с ребром k. Используя современную символику, читатели легко могут это доказать. А поскольку все гномоны составляют квадрат со стороной 1 + 2 + 3 + … + n, то формула (4) доказана.

Вернемся к вычислению сумм S_n^m. Как мы видим, в образовании $F(x)$ при m = 1, 2, 3 не прослеживается какой-либо закономерности, позволяющей найти эту функцию для любого m.

Упражнение 4. Покажите, что для $m=4$

$$F(x)=\frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)}{30}.$$

Тем не менее можно выработать алгоритм вычисления S_n^m, если обратиться к новой функции.

Назовем *обобщенной степенью числа* x произведение

$$x^{(m)}=x(x-1)\ldots(x-m+1).$$

Упражнение 5. Убедитесь, что

$$\Delta x^{(m+1)}=(m+1)x^{(m)}. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}k^{(m)}=\frac{(n+1)^{(m+1)}}{m+1}. \qquad (6)$$

Получили замечательные формулы, напоминающие правила дифференцирования и интегрирования обычной степенной функции. Таким образом, для обобщенной степени проблема поиска функции F решена.

Покажем, как, используя обобщенную степень, найти

[1] γνω′μων – *распознаватель; сначала времени: простейшие солнечные часы состояли из двух планок, скрепленных в виде буквы Г, затем распознаватель перпендикулярности; позже так стали называть Г-образную фигуру, приложение которой к основной фигуре не меняет ее форму.*

сумму S_n^m. Разберем для примера случай $m = 2$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} k^{(2)} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3}, \text{ или } \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}, \text{ то}$$

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Этот прием позволяет найти суммы S_n^m при любом показателе m, зная формулы для соответствующих сумм с меньшими показателями.

Упражнение 6. Вычислите таким способом $S_n^3, S_n^4, S_n^5, S_n^6$.

Одним из первых способ суммирования, использующий формулу (2), применил к вычислению S_n^m французский математик Б.Паскаль. Он даже рассмотрел суммы более общего вида, когда основания степеней образуют произвольную арифметическую прогрессию.

Пример 4. Вычислим, вслед за Паскалем, сумму

$$Q_m = a^m + (a+d)^m + \ldots + (a+(n-1)d)^m.$$

Воспользуемся биномом Ньютона – формулой возведения двучлена в m-ю степень:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k,$$

где $C_m^k = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ – биномиальные коэффициенты. Тогда

$$(a+d)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 a^m d + C_{m+1}^2 a^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$(a+2d)^{m+1} - (a+d)^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^1 (a+d)^m d + C_{m+1}^2 (a+d)^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$(a+nd)^{m+1} - (a+(n-1)d)^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^1 (a+(n-1)d)^m d + C_{m+1}^2 (a+(n-1)d)^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1}.$$

Складывая левые и правые части равенств, получим

$$(a+nd)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 Q_m d +$$

$$+ C_{m+1}^2 Q_{m-1} d^2 + C_{m+1}^3 Q_{m-2} d^3 + \ldots + nd^{m+1}. \quad (7)$$

Применим формулу (7) для вычисления некоторых Q_m (учитывая равенство $C_{m+1}^k = 0$ при $k > m+1$). Значения $Q_0 = n$ и $Q_1 = \dfrac{2a+(n-1)d}{2} n$ нам хорошо известны. Найдем Q_2. Положим в (7) $m = 2$: $(a+nd)^3 - a^3 = 3Q_2 d + 2Q_1 d^2 + Q_0 d^3$. Откуда

$$Q_2 = n\left(a^2 + a(n-1)d + \frac{d^2}{6}\left(2n^2 - n + 1\right)\right).$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = n\frac{4n^2-1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{n} (3k-2)^2 = n\frac{6n^2-3n-1}{2}.$$

Упражнение 7. Найдите Q_3 и убедитесь в верности равенства

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2\left(2n^2-1\right).$$

Решим, используя обобщенную степень, несколько интересных геометрических задач. В частности, найдем число одинаковых шаров, из которых сложены правильные пирамиды. Но прежде чем обращаться к пирамидам, рассмотрим правильные многоугольники, выложенные на плоскости из шаров.

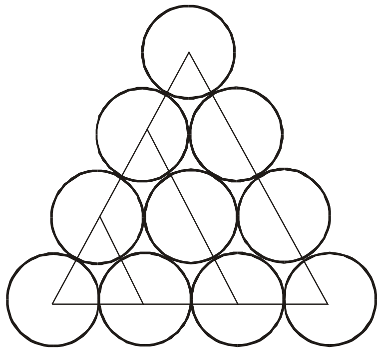

Рис. 3

Начнем с треугольника. Возьмем один шар, к нему приложим еще два так, чтобы образовался треугольник, каждая сторона которого содержит два шара. Затем к этим шарам приложим еще три, так чтобы снова получился треугольник (рис.3), но уже со стороной в три шара. Далее можно выложить треугольник с четырьмя шарами в каждой стороне и т.д. Выпишем последовательность чисел, выражающих количества шаров, составляющих полученные правильные треугольники:

1, 3, 6, 10, …

Эти числа называют *треугольными.* Аналогично из шаров строят квадраты, пятиугольники и другие правильные многоугольники, растущие из какой-либо одной своей вершины (рис.4, 5). Количества используемых при этом шаров представляют собой соответственно *квадратные числа*

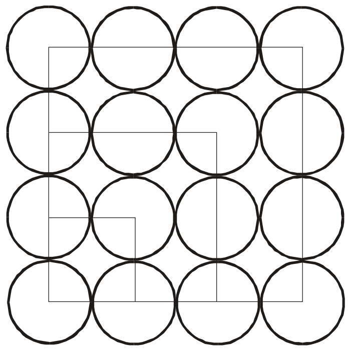

Рис. 4

1, 4, 9, 16, …,

пятиугольные числа

1, 5, 12, 22, …

и т.д.

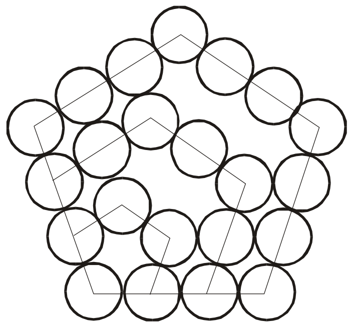

Рис. 5

Идея выкладывания шаров на плоскости в виде правильных многоугольников восходит к школе Пифагора. Пифагорейцами было подмечено, что n-е треугольное число представляет собой сумму первых n натуральных чисел, n-е квадратное – сумму первых n нечетных чисел, n-е пятиугольное – сумму n членов прогрессии 1, 4, 7, 10, … $(3n-2)$, … Это позволило им дать общее определение *q-угольного числа* с номером n как суммы n членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $q-2$.

Упражнение 8. Покажите, пользуясь этим определением, что q-угольноое число с номером n задается формулой

$$\Phi_q(n)=\frac{n}{2}\left((n-1)(q-2)+2\right).$$

Откуда, в частности, имеем

$$\Phi_3(n)=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)^{(2)}}{2},\ \Phi_4(n)=n^2.$$

Фигурные числа обладают многими интересными свойствами (см. далее упражнение 17). Одно из самых замечательных их свойств было установлено П.Ферма: *всякое натуральное число является суммой не более трех треугольных чисел, не более четырех квадратных, не более пяти пятиугольных чисел и т.д.* Доказано оно было О.Коши в 1815 году.

Пример 5. А теперь сложим из одинаковых шаров правильный *тетраэдр* – треугольную пирамиду, все грани которой правильные треугольники. Сначала плотно уложим на плоскости шары нижнего слоя в виде правильного треугольника со стороной n (в каждой стороне содержится n шаров); в углублениях между шарами нижнего слоя разместим шары следующего слоя и т.д. Количество шаров каждого слоя выражается соответствующим треугольным числом, а поэтому количество шаров, из которых сложен тетраэдр, выражается суммой

$$\Phi_3^{(3)}(n)=\Phi_3(n)+\Phi_3(n-1)+\ldots+\Phi_3(1)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(2)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Числа $\Phi_3^{(3)}$ называют *тетраэдрическими*, они представляют собой обобщение треугольных чисел на случай трехмерного пространства. Чтобы это подчеркнуть, мы добавили верхний индекс 3; для плоского случая индекс 2 мы не писали.

Пример 6. Из шаров можно сложить и правильную 4-угольную пирамиду. Число шаров нижнего слоя такой пирамиды равно $\Phi_4(n)$, а их количество во всей пирамиде равно

$$\Phi_4^{(3)}(n)=\Phi_4(n)+\Phi_4(n-1)+\ldots+\Phi_4(1)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Числа $\Phi_4^{(3)}(n)$ называют *пирамидальными.* С тетраэдрическими и пирамидальными числами были знакомы пифагорейцы, им и принадлежит идея выкладывания пирамид из одинаковых шаров. Но они не строили q-угольных пирамид для $q>4$: ведь в этом случае невозможно на правильный q-угольник, сложенный из шаров, уложить новый слой той же формы из меньшего числа шаров так, чтобы шары лежали плотно и не скатывались. Мы же можем пойти дальше.

Пример 7. Найдем сумму q-угольных чисел для любого q, уже не обращаясь к геометрическому истолкованию этих сумм.

$$\Phi_q^{(3)}(n)=\sum_{k=1}^{n}\Phi_q(k)=\sum_{k=1}^{n}k\left(1+\frac{(k-1)(q-2)}{2}\right)=$$
$$=1+2+3+\ldots+n+\frac{q-2}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{(2)}=$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{q-2}{2}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{3}=\frac{n(n+1)}{6}\left((n-1)(q-2)+3\right).$$

И тем более античные ученые, мыслившие геометрически, не могли себе даже позволить обобщения тех же тетраэдрических и пирамидальных чисел, не говоря уже об аналогах любого q-угольного числа, на случай четырехмерного пространства. Попытки выйти из трехмерного пространства в пространство большей размерности рассматривались тогда как противоречащие здравому смыслу. Даже в III веке н.э. александрийский математик Папп писал: «Не существует ничего, что заключало бы больше, чем три измерения». Ну а мы займемся «строительством» правильных q-угольных пирамид в четырехмерном пространстве. Обозначим

$$\Phi_q^{(4)}(n)=\Phi_q^{(3)}(1)+\Phi_q^{(3)}(2)+\ldots+\Phi_q^{(3)}(n).$$

Упражнение 9. Покажите, что

$$\Phi_q^{(4)}(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{4!}\left((n-1)(q-2)+4\right).$$

Продолжая обобщать q-угольные числа на пространства большей размерности, определим сумму

$$\Phi_q^{(m)}(n)=\Phi_q^{(m-1)}(1)+\Phi_q^{(m-1)}(2)+\ldots+\Phi_q^{(m-1)}(n).$$

Упражнение 10. Индукцией по m докажите, что

$$\Phi_q^{(m)}(n)=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{m!}\left((n-1)(q-2)+m\right).$$

В частности, при $q=3$ получаем

$$\Phi_3^{(m)}(n)=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}.$$

Это – обобщение треугольных чисел на случай m-мерного пространства. Поскольку многомерное обобщение треугольника называют симплексом (от лат. simplex – простой), то числа $\Phi_3^{(m)}(n)$ естественно назвать *m-мерными симплициальными.* Числа эти появились уже у Нарайаны при решении задачи, сформулированной в начале статьи. Теперь мы можем привести решение Нарайаны, используя наши обозначения.

1. Корова приносит $20=\Phi_3^{(1)}(20)$ телок первого поколения.

2. Первая телка первого поколения дает 17 телок второго поколения, вторая – 16 и т.д. Всего будет 17 + 16 + 15 + … … + 1 телок второго поколения. В результате получаем число $\Phi_3^{(2)}(17)=153$.

3. Подсчитывая потомство телок второго поколения, приходим к сумме $\Phi_3^{(2)}(14)+\Phi_3^{(2)}(13)+\ldots+\Phi_3^{(2)}(1)$. А она равна $\Phi_3^{(3)}(14)=560$.

4. Продолжая рассуждать дальше, найдем численность всего потомства:

$$\Phi_3^{(1)}(20)+\Phi_3^{(2)}(17)+\Phi_3^{(3)}(14)+\Phi_3^{(4)}(11)+$$
$$+\Phi_3^{(5)}(8)+\Phi_3^{(6)}(5)+\Phi_3^{(7)}(2)=$$
$$=20+153+560+1001+792+210+8=2744.$$

Итак, в течение 20 лет от одной коровы появится стадо численностью в 2745 голов.

Все рассмотренные до сих пор примеры касались суммирования степенных функций. И у читателя может создаться впечатление, что для других функций формула (2) не годится. На самом деле это не так.

Пример 8. Вычислим следующую сумму:

$$\sin a+\sin 2a+\ldots+\sin na.$$

Умножим каждое слагаемое на $2\sin\frac{a}{2}$ и преобразуем полученные произведения в разности:

$$2\sin\frac{a}{2}\sin ka = \cos\frac{2k-1}{2}a - \cos\frac{2k+1}{2}a = F(k) - F(k+1).$$

Откуда

$$2\sin\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \cos\frac{a}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}a = 2\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}.$$

Таким образом, при $a \neq 2\pi m$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

В случае $a = 2\pi m$ сумма равна нулю.

Другие примеры читатели найдут в упражнениях.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Если по функции f не удается найти функцию F, удовлетворяющую (1), то стоит попытаться найти функцию F, удовлетворяющую какому-нибудь другому условию, например такому:

$$f(x) = x\big(F(x-1) - 2F(x) + F(x+1)\big).$$

При внимательном рассмотрении нетрудно увидеть, что выражение, стоящее в скобках, равно $\Delta F(x) - \Delta F(x-1) = \Delta\big(\Delta F(x-1)\big) = \Delta^2 F(x-1)$. И в этом случае при суммировании $f(k)$ все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются, в результате

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = nF(n+1) - (n+1)F(n) + F(0).$$

Пример 9. Вычислим сумму $\cos a + 2\cos 2a + \ldots + n\cos na$.

Упражнение 11. Покажите, что

$$4\cos ka\,\sin^2\frac{a}{2} = -\cos(k-1)a + 2\cos ka - \cos(k+1)a.$$

Умножая обе части равенства на k и суммируя по k, найдем при $a \neq 2\pi m$ искомую сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos ka = \frac{(n+1)\cos na - n\cos(n+1)a - 1}{4\sin^2\frac{a}{2}}.$$

Этот результат можно вывести из формулы примера 8, если заметить, что $(\sin kx)' = k\cos kx$, и продифференцировать полученную там сумму, предварительно заменив в ней a на x. Предлагаем читателям проделать это самостоятельно.

Замечание 2. Предположим теперь, что по функции f удалось найти такую функцию F, для которой выполняется равенство

$$f(x) = F(x+1) - tF(x).$$

Тогда

$$\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(k+1)}{t^k} - \frac{F(k)}{t^{k-1}},$$

что позволяет найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(n+1)}{t^n} - F(1).$$

Приведем примеры.

Пример 10. Пусть $f(x) = x(3-x)$.

Так как $x(3-x) = x(x+1) - 2(x-1)x$, то $t = 2$, $F(x) = (x-1)x$, и

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(3-k)}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

Пример 11. Вычислим сумму

$$-\cos a + \cos 2a - \cos 3a + \ldots + (-1)^n\cos na.$$

Запишем тождество

$$2\cos\frac{a}{2}\cos ka = \cos\frac{2k+1}{2}a + \cos\frac{2k-1}{2}a;$$

здесь $t = -1$, поэтому

$$2\cos\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ka = (-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}a - \cos\frac{a}{2}.$$

Откуда при $a \neq \pi(2m+1)$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ka = -\frac{1}{2} + (-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}a}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

При $a = \pi(2m+1)$ каждое слагаемое равно единице, и сумма равна n.

Упражнения

12. Докажите равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)} = \frac{1}{md}\left(\frac{1}{(a+d)(a+2d)\ldots(a+md)} - \frac{1}{(a+(n+1)d)(a+(n+2)d)\ldots(a+(n+m)d)}\right)$$

и рассмотрите его частные случаи:

1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$;

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

13. Найдите следующие суммы:

1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)$;

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}$;

5) $\sum_{k=1}^{n}\log_a\left(1+\frac{1}{k}\right)$;

6) $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k(k+1)}$;

7) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x}{\sin kx \sin(k+1)x}$;

8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin x}{\cos kx \cos(k+1)x}$.

14. Докажите при $d \neq 2\pi m$

а) $$\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kd) = \frac{\sin\frac{n}{2}d \sin\left(a+\frac{n+1}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}};$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} \cos(a+kd) = \frac{\sin\frac{n}{2}d \cos\left(a+\frac{n+1}{2}d\right)}{\sin\frac{d}{2}}.$$

15. Выведите следующие формулы:

а) $$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1;$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{a}{2^n} - \operatorname{ctg} a;$$

в) $$\sum_{k=1}^{n} k \sin ka = \frac{(n+1)\sin na - n\sin(n+1)a}{4\sin^2\frac{a}{2}};$$

г) $$\sum_{k=1}^{n} a^k \sin kx = \frac{a^{n+2}\sin nx - a^{n+1}\sin(n+1)x + a\sin x}{1-2a\cos x + a^2};$$

д) $$\sum_{k=1}^{n} a^k \cos kx = \frac{a^{n+2}\cos nx - a^{n+1}\cos(n+1)x + a\cos x - a^2}{1-2a\cos x + a^2}.$$

16. Вычислите сумму рядов

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+d)}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

17. Докажите следующие утверждения:

а) квадратное число есть сумма двух последовательных треугольных чисел (результат пифагорейцев);

б) $\Phi_k(n) = \Phi_{k-1}(n) + \Phi_3(n-1)$ (результат Никомаха);

в) восьмикратное треугольное число, увеличенное на 1, является квадратным (результат Диофанта, III в.);

г) если разбить ряд нечетных чисел на группы, число членов которых возрастает как натуральный ряд, то сумма чисел каждой группы равна кубу числа членов этой группы (результат Никомаха).

к