Аналогично получаем

$$S_n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n+6n^3-3n+1)}{42}.$$

7. $4Q_3 = 4a^3n + 6a^2dn(n-1) + 2ad^2n(2n^2-3n+1) + d^3n^2(n-1)^2$.

8. Воспользуйтесь формулой суммы n членов арифметической прогрессии.

9. $\Phi_q^{(4)}(n) =$

$$= \frac{q-2}{3!}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(3)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{(2)}}{2} = \frac{q-2}{4!}(n+2)^{(4)} + \frac{(n+2)^{(3)}}{3!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{4!}\left((n-1)(q-2)+4\right).$$

10. Для m = 2, 3, 4 формула верна; предположим, что она верна для $m = s$, и вычислим

$\Phi_q^{(s+1)}(n) =$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Phi_q^{(s)}(k) = \frac{q-2}{s!}\sum_{k=1}^{n}(k+s-2)^{(s)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+s-2)^{(s-1)}}{(s-1)!} =$$

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{(s+1)!}\left((n-1)(q-2)+s+1\right).$$

11. Дважды примените формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

12. Используйте равенство

$$\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)} =$$

$$= \frac{1}{md}\left(\frac{1}{(a+kd)\ldots(a+(k+m-1)d)} - \frac{1}{(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)}\right).$$

Тогда

1) $\frac{n}{2n+1}$; 2) $\frac{n}{2(3n+2)}$; 3) $\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$;

4) $\frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$.

13. 1) $\frac{1}{2} + \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6}$;

2) $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$; 3) $\frac{1}{4} - \frac{2n+3}{2(n+2)(n+3)}$

(воспользуйтесь равенством

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)});$$

4) $1 - \frac{1}{n!}$; 5) $\log_a(n+1)$;

6) $\operatorname{arctg} n$ (пусть $\operatorname{arctg}(k+1) = a$, $\operatorname{arctg} k = b$, тогда $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{1}{1+k(k+1)}$);

7) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(n+1)x$;

8) $\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x$.

14. Воспользуйтесь равенствами

а) $2\sin\frac{d}{2}\sin(a+kd) = \cos\left(a + \frac{2k-1}{2}d\right) - \cos\left(a + \frac{2k+1}{2}d\right)$;

б) $2\sin\frac{d}{2}\cos(a+kd) = \sin\left(a + \frac{2k+1}{2}d\right) - \sin\left(a + \frac{2k-1}{2}d\right)$.

15. Для решения п. а) воспользуйтесь замечением 1 статьи; б) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x$, положив $x = \frac{a}{2^k}$, получим $\operatorname{tg}\frac{a}{2^k} = \operatorname{ctg}\frac{a}{2^k} - 2\operatorname{ctg}\frac{a}{2^{k-1}}$; в) см. упражнение 11;
г) воспользуйтесь равенством

$$\left(1 - 2a\cos x + a^2\right)a^k\sin kx =$$

$$= a^k\sin kx - a^{k+1}\sin(k+1)x - a^{k+1}\sin(k-1)x + a^{k+2}\sin kx;$$

п. д) аналогичен п. г).

16. а) $\frac{1}{d}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{d}\right)$, так как $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+d} = \frac{d}{k(k+d)}$;

б) $\frac{3}{4}$, так как $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.

17. Все утверждения, кроме случая г), доказываются простыми вычислениями; разберем п. г). Выпишем несколько чисел, отвечающих указанному разбиению: 1; 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; … Количество чисел, встречающихся до n-й группы, равно $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$. А их сумма равна $S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$; сумма всех чисел, включая и n-ю группу, равна $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Откуда

$S = S_n - S_{n-1} = n^3$.

Колебательный контур

1. $I_m = \frac{2q}{\sqrt{5LC_1}}$.

2. $I_0 = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{3L}}$.

3. $I_0 = \frac{q_0(C_1+C_2)}{C_2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{L(C_1+\varepsilon C_2)}}$.

4. $\frac{d_2 - d_1}{d_1} \ge \pi R\sqrt{\frac{C}{L_1}}$.

VIII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

8 класс

1. Планеты выглядят наиболее яркими и поэтому наиболее удобными для наблюдений во время противостояний. Период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет около 12 лет (точнее, 11,86 года). Следовательно, через год он уйдет вперед примерно на 1/12 часть окружности, и Земля «догонит» его за один месяц. Следовательно, наилучшая видимость будет в середине декабря.

2. В этот день склонение Солнца $\delta = +23{,}5°$. Поэтому пройти через зенит (а это и есть наибольшая высота) Солнце сможет только на широте тропика Рака, т.е. на широте $\varphi = 23{,}5°$.

3. Допустимый «уход» телескопа составляет $1''$ за час, или