

Аналогично получаем

$$S_n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$S_n^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n+6n^3-3n+1)}{42}.$$

7.  $4Q_3 = 4a^3n + 6a^2dn(n-1) + 2ad^2n(2n^2-3n+1) + d^3n^2(n-1)^2.$

8. Воспользуйтесь формулой суммы  $n$  членов арифметической прогрессии.

9.  $\Phi_q^{(4)}(n) =$

$$= \frac{q-2}{3!} \sum_{k=1}^n (k+1)^{(3)} + \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^{(2)}}{2} = \frac{q-2}{4!} (n+2)^{(4)} + \frac{(n+2)^{(3)}}{3!} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{4!} ((n-1)(q-2)+4).$$

10. Для  $m = 2, 3, 4$  формула верна; предположим, что она верна для  $m = s$ , и вычислим

$$\Phi_q^{(s+1)}(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \Phi_q^{(s)}(k) = \frac{q-2}{s!} \sum_{k=1}^n (k+s-2)^{(s)} + \sum_{k=1}^n \frac{(k+s-2)^{(s-1)}}{(s-1)!} =$$

$$= \frac{n(n+1)\dots(n+s-1)}{(s+1)!} ((n-1)(q-2)+s+1).$$

11. Дважды примените формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

12. Используйте равенство

$$\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\dots(a+(k+m)d)} =$$

$$= \frac{1}{md} \left( \frac{1}{(a+kd)\dots(a+(k+m-1)d)} - \frac{1}{(a+(k+1)d)\dots(a+(k+m)d)} \right).$$

Тогда

1)  $\frac{n}{2n+1}$ ; 2)  $\frac{n}{2(3n+2)}$ ; 3)  $\frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$ ;

4)  $\frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ .

13. 1)  $\frac{1}{2} + \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6}$ ;

2)  $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$ ; 3)  $\frac{1}{4} - \frac{2n+3}{2(n+2)(n+3)}$

(воспользуйтесь равенством

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{3}{(k+1)(k+2)(k+3)});$$

4)  $1 - \frac{1}{n!}$ ; 5)  $\log_a(n+1)$ ;

6)  $\operatorname{arctg} n$  (пусть  $\operatorname{arctg}(k+1) = a$ ,  $\operatorname{arctg} k = b$ , тогда

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{1}{1+k(k+1)});$$

7)  $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(n+1)x$ ;

8)  $\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x$ .

14. Воспользуйтесь равенствами

а)  $2 \sin \frac{d}{2} \sin(a+kd) = \cos\left(a + \frac{2k-1}{2}d\right) - \cos\left(a + \frac{2k+1}{2}d\right)$ ;

б)  $2 \sin \frac{d}{2} \cos(a+kd) = \sin\left(a + \frac{2k+1}{2}d\right) - \sin\left(a + \frac{2k-1}{2}d\right)$ .

15. Для решения п. а) воспользуйтесь замечением 1 статьи;

б)  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$ , положив  $x = \frac{a}{2^k}$ , получим

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2^k} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2^k} - 2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2^{k-1}}; \text{ в) см. упражнение 11;}$$

г) воспользуйтесь равенством

$$(1 - 2a \cos x + a^2) a^k \sin kx =$$

$$= a^k \sin kx - a^{k+1} \sin(k+1)x - a^{k+1} \sin(k-1)x + a^{k+2} \sin kx;$$

п. д) аналогичен п. г).

16. а)  $\frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{d}\right)$ , так как  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+d} = \frac{d}{k(k+d)}$ ;

б)  $\frac{3}{4}$ , так как  $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$ .

17. Все утверждения, кроме случая г), доказываются простыми вычислениями; разберем п. г). Выпишем несколько чисел, отвечающих указанному разбиению: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; ... Количество чисел, встречающихся до  $n$ -й группы, равно  $1+2+\dots+(n-1) = n(n-1)/2$ . А их сумма равна

$$S_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}; \text{ сумма всех чисел, вклю-}$$

чая и  $n$ -ю группу, равна  $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ . Откуда

$$S = S_n - S_{n-1} = n^3.$$

### Колебательный контур

1.  $I_m = \frac{2q}{\sqrt{5LC_1}}$ .

2.  $I_0 = E \sqrt{\frac{C}{3L}}$ .

3.  $I_0 = \frac{q_0(C_1+C_2)}{C_2} \sqrt{\frac{\epsilon}{L(C_1+\epsilon C_2)}}$ .

4.  $\frac{d_2-d_1}{d_1} \geq \pi R \sqrt{\frac{C}{L_1}}$ .

### VIII Российская олимпиада по астрономии и физике космоса

8 класс

1. Планеты выглядят наиболее яркими и поэтому наиболее удобными для наблюдений во время противостояний. Период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет около 12 лет (точнее, 11,86 года). Следовательно, через год он уйдет вперед примерно на  $1/12$  часть окружности, и Земля «догонит» его за один месяц. Следовательно, наилучшая видимость будет в середине декабря.

2. В этот день склонение Солнца  $\delta = +23,5^\circ$ . Поэтому пройти через зенит (а это и есть наибольшая высота) Солнце сможет только на широте тропика Рака, т.е. на широте  $\varphi = 23,5^\circ$ .

3. Допустимый «уход» телескопа составляет  $1''$  за час, или