(3932760; 6811741)… В частности, $8^3 - 7^3 = 13^2$ и $3932761^3 - 3932760^3 = 6811741^2$. Согласитесь, последняя формула впечатляет!

б) $(2n-1)(2n+1) = 3(2x+1)^2$. Числа $2n - 1$ и $2n + 1$ взаимно просты, так что одно из них должно быть квадратом, а другое – утроенным квадратом. Значит, либо $2n-1=3t^2$ и $2n+1=s^2$, либо $2n-1=t^2$ и $2n+1=3s^2$. В первом случае $s^2-3t^2=2$, что невозможно, поскольку квадрат целого числа не может давать остаток 2 при делении на 3. Значит, имеет место второй случай: $2n-1=t^2$. Обозначив $t = 2k + 1$, из равенства $2n-1=(2k+1)^2$ получаем $n = 2k^2+2k+1 = k^2 + (k+1)^2$.

в) $6x^2+12x+8 \equiv 2 \not\equiv y^2 \pmod 3$.

16. Числа m и n удовлетворяют равенству $m^2-3n^2=1$, которое можно записать в виде $(m-1)(m+1)=3n^2$.

а) Если k нечетно, то m четно, так что числа $m - 1$ и $m + 1$ взаимно просты, и решение такое же, как решение пункта б) предыдущего упражнения.

б) Если k четно, то m нечетно и, следовательно, НОД($m - 1$, $m + 1$) = 2. Значит, одно из чисел $m - 1$ и $m + 1$ имеет вид $2a^2$, а другое $6b^2$. В случае, когда $m-1=2a^2$ и $m+1=6b^2$, имеем $a^2=3b^2-1$, что невозможно. Следовательно, $m+1=2a^2$, что и требовалось доказать.

17. а) Очевидно, $(x-1)(x+1)=py^2$. Если x четно, то числа $x - 1$ и $x + 1$ взаимно просты, и для некоторых натуральных a и b должна выполняться одна из систем

$$\begin{cases} x-1=a^2, \\ x+1=pb^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1=pa^2, \\ x+1=b^2. \end{cases}$$

Значит, при четном x одно из чисел $x - 1$ и $x + 1$ является квадратом натурального числа.

Если же x нечетно, то НОД($x - 1$, $x + 1$) = 2, и имеем системы

$$\begin{cases} x-1=2a^2, \\ x+1=2pb^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1=2pa^2, \\ x+1=2b^2, \end{cases}$$

из которых следует, что $x - 1$ или $x + 1$ является удвоенным квадратом.

б) Да. Например, $x = 4$, $y = 1$, $d = 15$.

18. Поскольку $-1<\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}<0$ и число

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$$

целое, то

$$\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}=$$

$$=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)^n=$$

$$=2^n\cdot\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)=$$

$$=2^n\cdot\left(2x_n+6y_n\right)=2^{n+1}\left(x_n+3y_n\right),$$

где $x_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$ и $y_n=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$ удовлетворяют равенству $x_n^2-3y_n^2=1$. Осталось заметить, что x_n и y_n – числа разной четности.

19. Рассмотрим 8 точек: вершины и середины сторон некоторого квадрата. Пусть все они лежат на гиперболах $xy=\pm1$. Если на некоторой ветви лежат некоторые две точки K и L, то соединим их отрезком. Если K и L не лежат на одной стороне квадрата, то с любой стороны от отрезка KL найдется точка M рассматриваемой системы, для которой углы MKL и MLK оба острые. Противоречие очевидно: одна из восьми точек оказалась в полуполосе, ограниченной отрезком KL и перпендикулярами к нему, восстановленными из K и L, и расположенной «внутри» рассматриваемой ветви. Но в этой полуполосе нет ни одной точки рассматриваемых гипербол. Ясно также, что K и L не могут быть соседними вершинами квадрата (иначе середина отрезка KL не лежит на гиперболах).

Поскольку никакая сторона квадрата не может пересекать никакую ветвь гиперболы более чем в двух точках, то мы приходим к единственной конфигурации: на каждой ветви гиперболы лежат одна вершина квадрата и середина одной из выходящих из этой вершины сторон.

Рассмотрим такие две точки A и B. При симметрии относительно начала координат точки A и B переходят в точки A' и B', лежащие на другой ветви той же гиперболы. При этом отрезок $A'B'$ равен и параллелен отрезку BA. Если бы противоположная вершине B вершина квадрата и противоположная середине A середина стороны квадрата не совпадали с точками B' и A' соответственно, то на ветви гиперболы нашлись бы два разных отрезка, равных по длине и параллельных. Противоречие: отрезки, высекаемые на ветви гиперболы разными параллельными прямыми, различны по длине.

20. а) Воспользуйтесь индукцией или, записав тождество в виде $\varphi_n^2-\varphi_n\varphi_{n-1}-\varphi_{n-1}^2=-(-1)^n$, вспомните теорему 6.

б) $\varphi_{n-2}\varphi_{n+2}=(\varphi_n-\varphi_{n-1})(\varphi_n+\varphi_{n+1})=$

$$=\varphi_n^2-\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}+\varphi_n\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1}\varphi_n=$$

$$=-(-1)^n+\varphi_n(\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1})=\varphi_n^2-(-1)^n.$$

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Пусть Петя задумал число $\overline{ab}=10a+b$. После указанных в условии задачи операций Петя получит новое число $11(a+b)-10a-b=a+10b=\overline{ba}$, которое отличается от задуманного перестановкой цифр.

Петя задумал число 52.

2. Доля мальчиков может сохраниться лишь в том случае, если на каждого вновь пришедшего мальчика будет приходиться шесть вновь пришедших девочек. Чтобы доля уменьшилась, пришедших девочек должно быть еще больше. Если бы пришли 2 мальчика или больше, то должны еще прийти более $2\cdot6=12$ девочек, т.е. всего более 14 человек. Это невозможно. Значит, в кружок пришел только один мальчик, а девочек пришло – 12.

3. Достроим второй шестиугольник до прямоугольника (рис.1). Далее проводим прямую, проходящую через центр

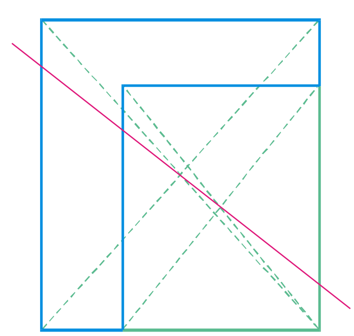

Рис. 1