(3932760; 6811741)… В частности, $8^3 - 7^3 = 13^2$ и $3932761^3 - 3932760^3 = 6811741^2$. Согласитесь, последняя формула впечатляет!

б) $(2n-1)(2n+1) = 3(2x+1)^2$. Числа $2n - 1$ и $2n + 1$ взаимно просты, так что одно из них должно быть квадратом, а другое – утроенным квадратом. Значит, либо $2n-1 = 3t^2$ и $2n+1 = s^2$, либо $2n-1 = t^2$ и $2n+1 = 3s^2$. В первом случае $s^2 - 3t^2 = 2$, что невозможно, поскольку квадрат целого числа не может давать остаток 2 при делении на 3. Значит, имеет место второй случай: $2n-1 = t^2$. Обозначив $t = 2k + 1$, из равенства $2n-1 = (2k+1)^2$ получаем $n = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$.

в) $6x^2 + 12x + 8 \equiv 2 \not\equiv y^2 \pmod 3$.

16. Числа m и n удовлетворяют равенству $m^2 - 3n^2 = 1$, которое можно записать в виде $(m-1)(m+1) = 3n^2$.

а) Если k нечетно, то m четно, так что числа $m - 1$ и $m + 1$ взаимно просты, и решение такое же, как решение пункта б) предыдущего упражнения.

б) Если k четно, то m нечетно и, следовательно, НОД($m - 1$, $m + 1$) = 2. Значит, одно из чисел $m - 1$ и $m + 1$ имеет вид $2a^2$, а другое $6b^2$. В случае, когда $m-1 = 2a^2$ и $m+1 = 6b^2$, имеем $a^2 = 3b^2 - 1$, что невозможно. Следовательно, $m+1 = 2a^2$, что и требовалось доказать.

17. а) Очевидно, $(x-1)(x+1) = py^2$. Если x четно, то числа $x - 1$ и $x + 1$ взаимно просты, и для некоторых натуральных a и b должна выполняться одна из систем

$$\begin{cases} x-1 = a^2, \\ x+1 = pb^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1 = pa^2, \\ x+1 = b^2. \end{cases}$$

Значит, при четном x одно из чисел $x - 1$ и $x + 1$ является квадратом натурального числа.

Если же x нечетно, то НОД($x - 1$, $x + 1$) = 2, и имеем системы

$$\begin{cases} x-1 = 2a^2, \\ x+1 = 2pb^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1 = 2pa^2, \\ x+1 = 2b^2, \end{cases}$$

из которых следует, что $x - 1$ или $x + 1$ является удвоенным квадратом.

б) Да. Например, $x = 4$, $y = 1$, $d = 15$.

18. Поскольку $-1 < \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1} < 0$ и число

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}$$

целое, то

$$\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right] = \left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1} =$$

$$= \left(1+\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)^n =$$

$$= 2^n \cdot \left(\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) =$$

$$= 2^n \cdot \left(2x_n + 6y_n\right) = 2^{n+1}\left(x_n + 3y_n\right),$$

где $x_n = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$ и $y_n = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}$ удовлетворяют равенству $x_n^2 - 3y_n^2 = 1$. Осталось заметить, что x_n и y_n – числа разной четности.

19. Рассмотрим 8 точек: вершины и середины сторон некоторого квадрата. Пусть все они лежат на гиперболах $xy = \pm 1$. Если на некоторой ветви лежат некоторые две точки K и L, то соединим их отрезком. Если K и L не лежат на одной стороне квадрата, то с любой стороны от отрезка KL найдется точка M рассматриваемой системы, для которой углы MKL и MLK оба острые. Противоречие очевидно: одна из восьми точек оказалась в полуполосе, ограниченной отрезком KL и перпендикулярами к нему, восстановленными из K и L, и расположенной «внутри» рассматриваемой ветви. Но в этой полуполосе нет ни одной точки рассматриваемых гипербол. Ясно также, что K и L не могут быть соседними вершинами квадрата (иначе середина отрезка KL не лежит на гиперболах).

Поскольку никакая сторона квадрата не может пересекать никакую ветвь гиперболы более чем в двух точках, то мы приходим к единственной конфигурации: на каждой ветви гиперболы лежат одна вершина квадрата и середина одной из выходящих из этой вершины сторон.

Рассмотрим такие две точки A и B. При симметрии относительно начала координат точки A и B переходят в точки A' и B', лежащие на другой ветви той же гиперболы. При этом отрезок $A'B'$ равен и параллелен отрезку BA. Если бы противоположная вершине B вершина квадрата и противоположная середине A середина стороны квадрата не совпадали с точками B' и A' соответственно, то на ветви гиперболы нашлись бы два разных отрезка, равных по длине и параллельных. Противоречие: отрезки, высекаемые на ветви гиперболы разными параллельными прямыми, различны по длине.

20. а) Воспользуйтесь индукцией или, записав тождество в виде $\varphi_n^2 - \varphi_n\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^2 = -(-1)^n$, вспомните теорему 6.

б) $\varphi_{n-2}\varphi_{n+2} = \left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right)\left(\varphi_n + \varphi_{n+1}\right) =$

$$= \varphi_n^2 - \varphi_{n-1}\varphi_{n+1} + \varphi_n\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}\varphi_n =$$

$$= -(-1)^n + \varphi_n\left(\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}\right) = \varphi_n^2 - (-1)^n.$$

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №2)

1. Пусть Петя задумал число $\overline{ab} = 10a + b$. После указанных в условии задачи операций Петя получит новое число $11(a+b) - 10a - b = a + 10b = \overline{ba}$, которое отличается от задуманного перестановкой цифр.

Петя задумал число 52.

2. Доля мальчиков может сохраниться лишь в том случае, если на каждого вновь пришедшего мальчика будет приходиться шесть вновь пришедших девочек. Чтобы доля уменьшилась, пришедших девочек должно быть еще больше. Если бы пришли 2 мальчика или больше, то должны еще прийти более $2 \cdot 6 = 12$ девочек, т.е. всего более 14 человек. Это невозможно. Значит, в кружок пришел только один мальчик, а девочек пришло – 12.

3. Достроим второй шестиугольник до прямоугольника (рис.1). Далее проводим прямую, проходящую через центр

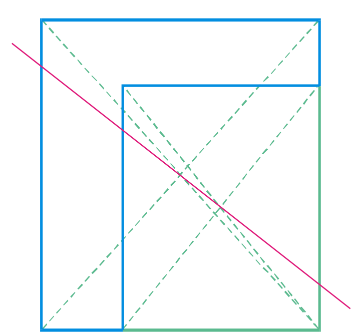

Рис. 1