Уравнения Пелля

1. Рассуждайте по индукции.
2. Обозначим через f_n количество способов пройти расстояние длиной n шагов. Очевидно, $f_0 = 1$ (никуда не ходить можно единственным способом) и $f_1 = 2$ (можно сделать либо шаг вперед, либо два шага вперед и шаг назад). Пройти $n + 2$ шага можно трояко: либо пройти сначала $n + 1$ шаг и сделать шаг вперед, либо пройти n шагов и сделать два шага, либо пройти $n + 1$ шаг, а затем сделать два шага вперед и шаг назад. Значит,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + f_{n+1} = 2f_{n+1} + f_n.$$

Ответ: $f_7 = 408$.
3. Если $a^2 - db^2 = \pm 1$, то

$$\frac{1}{a+b\sqrt{d}} = \frac{a-b\sqrt{d}}{\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)} = \frac{a-b\sqrt{d}}{a^2-db^2} = \pm\left(a-b\sqrt{d}\right).$$

Обратно, пусть числа x и y целые. Рассмотрим равенство

$$\left(a+b\sqrt{d}\right)\left(x+y\sqrt{d}\right) = 1$$

и сопряженное к нему

$$\left(a-b\sqrt{d}\right)\left(x-y\sqrt{d}\right) = 1.$$

Перемножив эти равенства, получаем

$$\left(a^2-db^2\right)\left(x^2-dy^2\right) = 1,$$

откуда $a^2 - db^2 = \pm 1$.
4. а) $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} =$
$= \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right)^2 = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)^2 = x_n^2 + 2y_n^2 + 2x_ny_n\sqrt{2}$. Поскольку $x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$, то $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{2} = \left(2x_n^2 - (-1)^n\right) + (2x_ny_n)\sqrt{2}$.
5. а) $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{2y_n^2} = \sqrt{x_n^2} + \sqrt{x_n^2 - (-1)^n}$.
б) Пусть n нечетно. Возведя число $\sqrt{m+d} + \sqrt{m}$ в n-ю степень и воспользовавшись тем, что $\left(\sqrt{m+d}\right)^2$ и $\left(\sqrt{m}\right)^2$ – натуральные числа, получим равенство

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = s\sqrt{m+d} + t\sqrt{m},$$

где s и t – натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим сопряженную формулу:

$$\left(\sqrt{m+d} - \sqrt{m}\right)^n = s\sqrt{m+d} - t\sqrt{m}.$$

Перемножим:

$$d^n = (m+d-m)^n = \left(s\sqrt{m+d} + t\sqrt{m}\right)\left(s\sqrt{m+d} - t\sqrt{m}\right) = s^2(m+d) - t^2m.$$

Таким образом, достаточно положить $k = t^2m$ – при этом

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = \sqrt{s^2(m+d)} + \sqrt{t^2m} = \sqrt{k+d^n} + \sqrt{k}.$$

Решение для четных n аналогично:

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = s + t\sqrt{m(m+d)},$$

где s, t – натуральные числа. Заменив $\sqrt{m}$ на $-\sqrt{m}$, получим

$$\left(\sqrt{m+d} - \sqrt{m}\right)^n = s - t\sqrt{m(m+d)}.$$

Следовательно,

$$d^n = (m+d-m)^n = \left(s + t\sqrt{m(m+d)}\right)\left(s - t\sqrt{m(m+d)}\right) = s^2 - t^2m(m+d).$$

Значит, если $k = t^2m(m+d)$, то

$$\left(\sqrt{m+d} + \sqrt{m}\right)^n = \sqrt{s^2} + \sqrt{t^2m(m+d)} = \sqrt{k+d^n} + \sqrt{k},$$

что и требовалось.
Можно решить задачу и по-другому. Обозначим $A = \sqrt{m} + \sqrt{m+d}$. Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x+d^n} + \sqrt{x}$. Она непрерывна, а ее значение в точке $x = 0$ меньше числа A^n. Поскольку эта функция стремится к бесконечности при $x \to +\infty$, то существует такое x, что

$$\sqrt{x+d^n} = A^n - \sqrt{x}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим после упрощения

$$\sqrt{x} = \frac{A^{2n} - d^n}{2A^n} = \frac{A^n - \left(\dfrac{d}{\sqrt{m+d}+\sqrt{m}}\right)^n}{2} = \frac{\left(\sqrt{m+d}+\sqrt{m}\right)^n - \left(\sqrt{m+d}-\sqrt{m}\right)^n}{2},$$

откуда уже легко вывести, что x – натуральное число.
в) Число $x = \dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}$ удовлетворяет равенству $x + \dfrac{1}{x} = n$. Положим $k_m = x^m + \dfrac{1}{x^m}$. Тогда $k_{m+1} = k_m\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - k_{m-1} = nk_m - k_{m-1}$. Поскольку числа $k_0 = 2$ и $k_1 = n$ натуральные, при помощи индукции легко доказать, что все числа k_m натуральные. Решая квадратное уравнение, находим $x^m = \dfrac{k_m \pm \sqrt{k_m^2 - 4}}{2}$. Поскольку $x \geq 1$, то нужно взять знак «плюс».
6. Нет. Если бы такие числа a, b, c и d существовали, то при помощи перехода к сопряженным числам мы получили бы

$$0 \leq \left(a - b\sqrt{2}\right)^2 + \left(c - d\sqrt{2}\right)^2 = 7 - 5\sqrt{2} < 0.$$

7. а) *Первый способ.* Пусть $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$. Переход к сопряженным числам дает равенство $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$, которое противоречит неравенствам $0 < 5-3\sqrt{2} < 1$ и $5\sqrt{2} - 3 > 1$.
Второй способ. Если $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m = \left(3+5\sqrt{2}\right)^n$, то и $\left(5-3\sqrt{2}\right)^m = \left(3-5\sqrt{2}\right)^n$. Перемножив эти равенства, получим $(25 - 9\cdot 2)^m = (9 - 25\cdot 2)^n$, т.е. $7^m = (-41)^n$, что невозможно.
б) Пусть для определенности $a < b$. Тогда $1 < b + a\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, и поэтому $m < n$. Перейдя к сопряженным числам и разделив почленно полученное при этом равенство на исходное, получим

$$\left|\frac{a-b\sqrt{d}}{a+b\sqrt{d}}\right|^m = \left|\frac{b-a\sqrt{d}}{b+a\sqrt{d}}\right|^n.$$

Сравним теперь величины $\mu = \left|\dfrac{b\sqrt{d}-a}{a+b\sqrt{d}}\right|$ и $\nu = \left|\dfrac{a\sqrt{d}-b}{b+a\sqrt{d}}\right|$. Для этого достаточно сравнить числа

$$\left|\left(b\sqrt{d}-a\right)\left(b+a\sqrt{d}\right)\right| \text{ и } \left|\left(a\sqrt{d}-b\right)\left(a+b\sqrt{d}\right)\right|.$$

Первое из них равно $\left|ab(d-1) + \left(b^2-a^2\right)\sqrt{d}\right|$, а второе равно