Ток I_1^* в первой катушке найдем из условия $L_2 I_0 = \frac{L_1}{k} I_1^*$:

$$I_1^* = \frac{kL_2}{L_1} I_0 .$$

Для определения максимального напряжения на конденсаторе воспользуемся законом сохранения энергии. Магнитная энергия, запасенная в катушке сразу после удаления сердечника, равна

$$W_L = \frac{L_1 \left(I_1^*\right)^2}{2k} + \frac{L_2 \left(I_2^*\right)^2}{2} = \frac{L_1}{2k}\left(\frac{kL_2}{L_1} I_0\right)^2 + \frac{L_2 I_0^2}{2} = \frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right).$$

Когда напряжение на конденсаторе максимально, общий ток в контуре равен нулю, т.е. токи через катушки связаны соотношением

$$I_1^{**} + I_2^{**} = 0.$$

Ранее полученная связь между токами ($L_1 I_1 - L_2 I_2 = \mathrm{const}$) для токов I_1^{**} и I_2^{**} будет иметь вид

$$\frac{L_1}{k} I_1^{**} - L_2 I_2^{**} = 0.$$

Из последних двух уравнений следует, что токи в катушках будут равны нулю, а вся энергия контура будет сосредоточена в конденсаторе и равна

$$W_C = \frac{CU_m^2}{2},$$

где U_m – максимальное напряжение на конденсаторе. Согласно закону сохранения энергии, $W_L = W_C$, или

$$\frac{L_2 I_0^2}{2}\left(1 + \frac{kL_2}{L_1}\right) = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_2\left(L_1 + kL_2\right)}{CL_1}}.$$

Задача 6. *В колебательном LCR-контуре (рис.13) активное сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: в те моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний в контуре) растягивают от длины* l_1 *до длины* l_2*, причем* $l_2 - l_1 \ll l_1$*, а в моменты, когда ток в цепи равен нулю, катушку быстро сжимают до прежнего размера. При каком относительном изменении длины катушки* $\left(l_2 - l_1\right)/l_1$ *колебания в контуре не будут затухать? Индуктивность катушки считать обратно пропорциональной ее длине.*

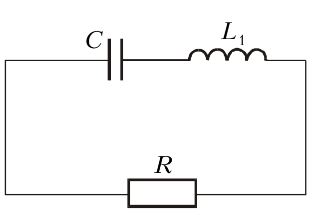

Рис. 13

Рассмотрим момент времени, когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения I_{1m} и катушку растягивают до длины l_2, при которой индуктивность равна L_2. Поскольку изменение индуктивности происходит быстро, будет сохраняться магнитный поток, пронизывающий катушку:

$$L_1 I_{1m} = L_2 I_{2m},$$

где I_{2m} – новый ток в катушке после ее удлинения. Так как индуктивность обратно пропорциональна длине катушки,

$$l_2 I_{1m} = l_1 I_{2m}.$$

Отсюда

$$I_{2m} = \frac{l_2}{l_1} I_{1m}.$$

Новая энергия в контуре стала

$$W_2 = \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} = \frac{L_2 l_2^2 I_{1m}^2}{2 l_1^2},$$

а первоначальная энергия была

$$W_1 = \frac{L_1 I_{1m}^2}{2}.$$

Приращение энергии в контуре равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L_2 l_2^2}{2 l_1^2} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2,$$

или, поскольку $L_2 = \frac{l_1}{l_2} L_1$,

$$\Delta W = \frac{L_1 l_2}{2 l_1} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2 = \frac{L_1\left(l_2 - l_1\right)}{2 l_1} I_{1m}^2.$$

Возвращение индуктивности к прежнему значению при нулевом токе в контуре, очевидно, не приводит к изменению энергии – она остается неизменной. Последующая подкачка энергии в контур происходит через время, равное полупериоду колебаний. За это время в контуре происходит потеря энергии в виде выделяющегося в резисторе тепла

$$\Delta W_R = \frac{I_{1m}^2 R}{2} \frac{T}{2} = \pi\sqrt{L_1 C}\,\frac{I_{1m}^2 R}{2}.$$

Колебания в контуре не будут затухать, если подкачка энергии в контур ΔW будет больше или равна потерям энергии ΔW_R:

$$\frac{L_1\left(l_2 - l_1\right)}{2 l_1} I_{1m}^2 \ge \pi\sqrt{L_1 C}\,\frac{I_{1m}^2 R}{2}.$$

Отсюда находим искомую величину относительного изменения длины катушки:

$$\frac{l_2 - l_1}{l_1} \ge \pi R \sqrt{\frac{C}{L_1}}.$$

Упражнения

1. В LC-контуре, изображенном на рисунке 14, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q, а конденсатор емкостью C_2 ($C_2 = 4C_1$) не заряжен. Определите максимальный ток в контуре после замыкания ключа. Омическими потерями в катушке индуктивностью L можно пренебречь.

2. В схеме на рисунке 15 в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток I_0 через катушку индуктивностью L в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальный ток

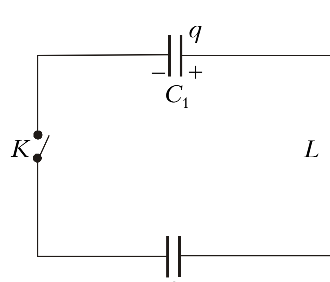

Рис. 14

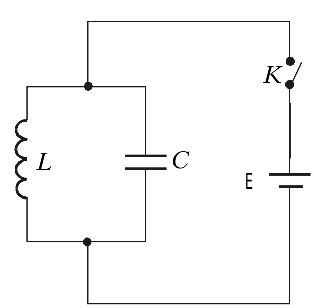

Рис. 15