Сразу после замыкания ключа конденсатор быстро зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи, а в катушке индуктивности будет медленно нарастать ток, начиная с нулевого значения. В момент размыкания ключа напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи $\mathcal{E}$, а через катушку будет течь ток, который мы обозначим I_0. Это будут начальные условия для нашего LC-контура.

Пусть в произвольный момент времени (после размыкания ключа) в контуре течет ток I, а напряжение на конденсаторе равно U_C, как это изображено на рисунке 10. Запишем закон Ома для данного контура:

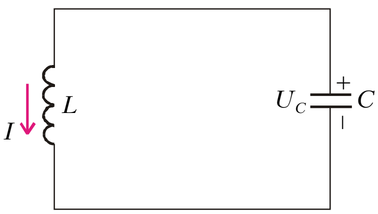

Рис. 10

$$LI' = U_C,$$

или, поскольку $I = -CU'$,

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Решение данного уравнения будем искать в виде

$$U_C(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Эта форма записи решения эквивалентна используемой ранее. Там мы имели две константы A и B, и в данном случае также две константы: A и φ. Используя начальные условия $U_C(0) = \mathcal{E}$ и $I(0) = I_0$, получим $\mathcal{E} = A\cos\varphi$, $I_0 = AC\omega_0\sin\varphi$. Отсюда

$$A = \sqrt{\mathcal{E}^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{I_0}{\mathcal{E}C\omega_0}.$$

Поскольку A является амплитудой колебаний напряжения на конденсаторе, эта величина и есть максимальное напряжение на нем. Следовательно, $\sqrt{\mathcal{E}^2 + \left(\dfrac{I_0}{C\omega_0}\right)^2} = 2\mathcal{E}$, откуда

$$I_0 = \sqrt{3}\mathcal{E}C\omega_0 = \mathcal{E}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

Как в предыдущих трех задачах, так и при решении этой задачи мы использовали общий принцип решения, который позволяет получить полную информацию о контуре. Теперь приведем упрощенное решение, исходя из общих физических соображений и закона сохранения энергии. Запишем закон сохранения энергии для момента времени $t = 0$ и для того момента, когда напряжение на конденсаторе максимально и ток в контуре равен нулю:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{4C\mathcal{E}^2}{2},$$

откуда и найдем искомый ток:

$$I_0 = \mathcal{E}\sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

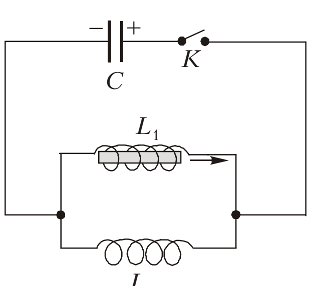

Рис. 11

Задача 5. *В схеме на рисунке 11 конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения, а ключ K разомкнут. После замыкания ключа в схеме происходят свободные колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0. Когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения, из нее быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в k раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе после выдвижения сердечника.*

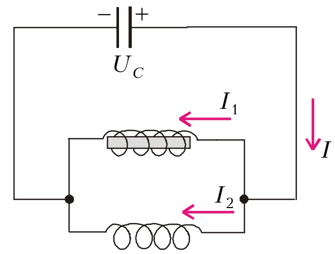

Рис. 12

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа K, но до выдвижения сердечника. Обозначим начальное напряжение на конденсаторе U_{C0}, напряжение в произвольный момент времени U_C. Пусть через катушку индуктивностью L_1 течет ток I_1, а через катушку индуктивностью L_2 – ток I_2 (рис.12). Запишем закон Ома для контура, включающего в себя конденсатор и катушку индуктивностью L_2:

$$L_2 I_2' = U_C. \qquad (1)$$

Закон Ома для контура, охватывающего обе катушки, имеет вид

$$L_1 I_1' = L_2 I_2',$$

или

$$(L_1 I_1 - L_2 I_2)' = 0.$$

Отсюда получим

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const},$$

или, поскольку начальные токи через катушки равны нулю,

$$L_1 I_1 = L_2 I_2.$$

Из условия непрерывности тока следует, что

$$I = I_1 + I_2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} I_2. \qquad (2)$$

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$L_2 I_2'' = U_C'.$$

Поскольку $I = -CU_C'$, уравнение приобретает вид

$$L_2 I_2'' + \frac{1}{C} I = 0.$$

Подставив сюда выражение (2), окончательно получим

$$I_2'' + \frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2} I_2 = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$I_2(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}$. Поскольку $I_2(0) = 0$, получим $A = 0$. Для нахождения константы B воспользуемся тем фактом, что амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0, и получим $B = I_0$. Тогда зависимости токов от времени имеют вид

$$I_2(t) = I_0\sin\omega_0 t \quad \text{и} \quad I_1(t) = \frac{L_2}{L_1} I_0 \sin\omega_0 t.$$

За время удаления сердечника из первой катушки магнитные потоки в обеих катушках не изменятся. Это приведет к тому, что ток во второй катушке сохранится:

$$I_2^* = I_0.$$