

Рис. 5

Подставляя выражение для  $I'$  в уравнение закона Ома, получим

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 E,$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – собственная частота контура. Это уравнение является неоднородным (справа не ноль) линейным дифференциальным уравнением второго порядка (по старшей производной). Ранее, в задаче 1, мы имели дело с аналогичным уравнением, только с нулевой правой частью. Сделав замену переменной:  $X = U_C - E$ , сведем наше неоднородное уравнение к однородному:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0.$$

Решение такого уравнения мы уже знаем:

$$X = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Для определения констант  $A$  и  $B$  используем наши начальные условия: при  $t=0$   $U_C = 0$ , или  $X = -E$ , и  $I = CU_C' = 0$ , или  $X' = 0$ . Подстановка начальных условий в решение позволяет найти  $A$  и  $B$ :

$$A = -E, B = 0.$$

Окончательно получим

$$X(t) = -E \cos \omega_0 t,$$

или

$$U_C(t) = E(1 - \cos \omega_0 t).$$

Изменение напряжения на конденсаторе будет происходить по гармоническому закону (рис.6), но, в отличие от предыдущей задачи, не относительно нулевого уровня, а относительно уровня  $U_C = E$ .

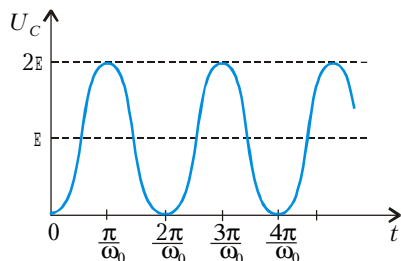


Рис. 6

**Задача 3.** В колебательном LC-контуре, изображенном на рисунке 7, при разомкнутом ключе К заряд на конденсаторе емкостью  $C_1$  равен  $q_0$ , а конденсатор емкостью  $C_2$  не заряжен. Через какое время после замыкания ключа заряд на конденсаторе емкостью  $C_2$  будет иметь максимальное значение? Чему будет равен этот заряд? Омическими потерями в катушке индуктивности пренебречь.

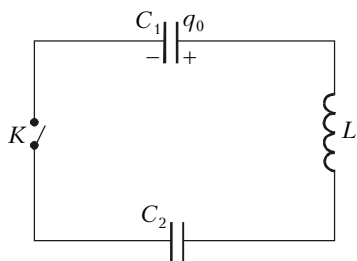


Рис. 7

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент заряд на первом конденсаторе  $q_1$ , на втором конденсаторе  $q_2$  и в контуре течет ток  $I$  (рис.8). Поскольку нас интересует заряд  $q_{2max}$ , разумно найти зависимость  $q_2(t)$ . Для этого запишем

закон Ома для нашего контура:

$$-LI' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_2}.$$

Поскольку  $I = q_2'$ , а  $q_1 + q_2 = q_0$ , уравнение относительно  $q_2$  будет иметь вид

$$q_2'' + \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}.$$

Введем новую переменную:

$$X = q_2 - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2},$$

запишем для нее уравнение колебаний:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}$  – собственная частота контура, и его решение:

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

При  $t=0$   $q_2 = 0$ , или  $X(0) = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}$ , и  $I = 0$ , или  $X' = 0$ .

Начальные условия позволяют найти константы  $A$  и  $B$ :

$$A = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}, B = 0.$$

Решение уравнения колебаний имеет вид

$$X(t) = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} \cos \omega_0 t,$$

или, переходя обратно к переменной  $q_2$ ,

$$q_2(t) = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Очевидно, что первый раз заряд  $q_2$  достигнет максимального значения через время  $t_1 = \pi/\omega_0$ , затем это максимальное значение будет повторяться с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$ . В общем случае это можно записать в виде

$$t_N = \frac{\pi}{\omega_0} (1 + 2N), \text{ где } N = 0, 1, 2, \dots$$

Величина максимального заряда на втором конденсаторе равна

$$q_{2max} = \frac{2q_0 C_2}{C_1 + C_2}.$$

**Задача 4.** В схеме, изображенной на рисунке 9, в начальный момент ключ К разомкнут, а конденсатор емкостью  $C$  не заряжен. Ключ К на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток через катушку индуктивности в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе оказалось равным  $2E$ , где  $E$  – ЭДС батареи. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. Внутреннее сопротивление батареи настолько мало, что время зарядки конденсатора (при замкнутом ключе) много меньше времени, в течение которого ключ К остается замкнутым.

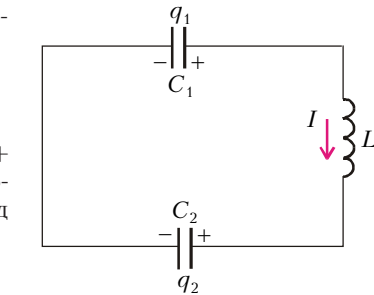


Рис. 8

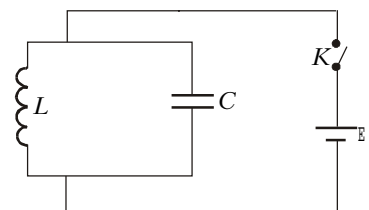


Рис. 9