

(В стационарном состоянии эта сила уравновешивается кулоновской силой, возникшей из-за разделения зарядов под действием центробежных сил инерции.) Поэтому

$$E_{\tau} = \frac{F_{\tau}}{e} = -\frac{m_e \omega^2 a}{e} \cos \varphi \sin \varphi.$$

Знаки «минус» в двух последних формулах говорят о том, что и касательная составляющая центробежной силы, и тангенциальная составляющая возникшего электростатического поля направлены против роста широтного угла φ .

Этого уже достаточно, чтобы оценить масштаб разделения зарядов на поверхности шарика. Как известно, поверхностная плотность заряда равна разности нормальных компонентов электрического поля по обе стороны от поверхности, умноженной на электрическую постоянную ϵ_0 . Вполне понятно, что формулы для нормальных компонентов будут иметь тот же размерный множитель $m_e \omega^2 a$, что и тангенциальные (им просто больше не от чего зависеть), только безразмерная зависимость от угла φ будет, скорее всего, другой. Поэтому можно ожидать, что поверхностная плотность заряда будет порядка

$$\sigma \sim \frac{m_e}{e} \omega^2 a \epsilon_0.$$

Но для того чтобы полюсы приобрели хотя бы по одному положительному заряду, равному e , к экватору должна быть отброшена хотя бы пара электронов – тогда уже и возникнет обещанный квадруполь. Это значит, что угловая скорость должна быть больше определенной минимальной величины. Полагая для оценки, что этим двум электронам отведен экваториальный пояс площадью порядка a^2 , получим

$$\sigma_0 a^2 \sim \frac{m_e \omega^2 a \epsilon_0}{e} a^2 \gtrsim 2e,$$

откуда

$$\omega^2 \gtrsim \frac{2e^2}{m_e \epsilon_0 a^3} \sim a^{-3}. \quad (3)$$

С другой стороны, при слишком большой скорости вращения шарик будет разорван центробежными силами инерции. Оценим и эту угловую скорость. Мысленно разделим шарик пополам и заменим одну из половин силами f , распределенными по поверхности кольца и отнесенными к единице площади этой поверхности (рис.4). Размерность величины f есть $\text{Н}/\text{м}^2$, т.е. f представляет собой механическое напряже-

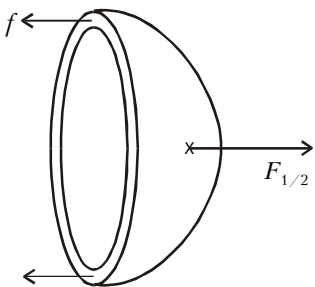


Рис. 4

ние. Если оно достигает предела прочности на разрыв f_{\max} , шарик разрушается. Эти силы, обеспечивающие прочность шарика (силы упругости), приложены к площади $2\pi a \delta$, где δ – толщина оболочки шарика (мы считаем, что она много меньше его радиуса a). Значит, суммарная сила равна $f \cdot 2\pi a \delta$. Она уравновешивается равнодействующей $F_{1/2}$ всех центробежных сил инерции, действующих на элементы полусферы. Эти центробежные силы изменяются от экватора до полюса, и мы знаем каким образом (см. выражение (1)). Так что можно было бы проинтегрировать их по поверхности полусферы и найти равнодействующую. Но мы не будем здесь этим заниматься, а снова сделаем оценку по порядку величины. Примем, что среднее (по поверхности шарика) значение центробежного ускорения

равно, например, половине наибольшего значения, достигаемого на экваторе (см. выражение (2)): $\langle w_c \rangle \sim \omega^2 a/2$. Умножим его на массу полусферической тонкой оболочки $4\pi a^2 \delta \rho_{\text{ш}}/2$, где $\rho_{\text{ш}}$ – плотность материала шарика (стекла). Тогда условие сохранности шарика запишется в виде

$$\frac{4\pi a^2 \delta \rho_{\text{ш}}}{2} \cdot \frac{\omega^2 a}{2} \lesssim f_{\max} \cdot 2\pi a \delta,$$

откуда

$$\omega^2 \lesssim \frac{2f_{\max}}{\rho_{\text{ш}} a^2} \sim a^{-2}. \quad (4)$$

(Интересно, что результат не зависит от толщины оболочки δ .)

Неравенства (3) и (4) определяют нашу «рабочую зону», в которой шарик уже стал квадруполем, но еще не разрушается (она заштрихована на рисунке 5). Найдем точку пересечения a_* соответствующих «кривых» в предельном случае, когда неравенство заменяется равенством (конечно, это не совсем линии, а скорее размазанные полосы – ведь мы делаем грубые оценки по порядку величины). Итак,

$$\frac{2e^2}{m_e \epsilon_0 a_*^3} \sim \frac{2f_{\max}}{\rho_{\text{ш}} a_*^2}, \text{ и } a_* \sim \frac{e^2 \rho_{\text{ш}}}{m_e \epsilon_0 f_{\max}}.$$

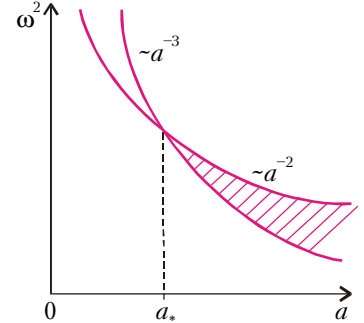


Рис. 5

Осталось сделать численные оценки. Фундаментальные константы известны: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/((Н·м²)). А что это за стекло, из которого сделан шарик? Поискав в таблицах, примем $\rho_{\text{ш}} \approx 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $f_{\max} \sim 10^9$ Н/м². (Например, в справочнике «Таблицы физических величин», изданном в 1976 году под редакцией И.К.Кикоина – одного из основателей журнала «Квант», что приятно вспомнить, – для стеклянного волокна указано предельное напряжение на разрыв, равное $2,1 \cdot 10^9$ Н/м². Конечно, эта характеристика зависит от технологии производства стеклянного изделия, в том числе и елочного шарика. Поэтому для оценки мы приняли, из соображений осторожности, вдвое меньшую величину.) Подставив эти числа в последнюю формулу, получим $a_* \sim 10^{-2}$ м = 2 см. А соответствующее значение угловой скорости можно найти из любого из выражений (3) или (4): $\omega_* \sim 10^5$ с⁻¹, что для частоты вращения дает $\nu_* = \omega_*/(2\pi) \sim 10^4$ Гц, т.е. 10^4 оборотов в секунду. Похоже, что реальный елочный шарик можно-таки сделать электрическим квадруполем путем его вращения.

И тут Тин Эйджер вспомнил, что шарик можно не только равномерно вращать вокруг фиксированной оси, но и скатывать по наклонной плоскости с углом α без проскальзывания, а значит, с ускорением $g \sin \alpha$. Э, брат, – подумал наш герой, – да ведь это будет уже не электростатика, а целая электродинамика! Но тут наступил Новый Год, и настала пора заниматься подарками.