

$$6) \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k(k+1)};$$

$$7) \sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{\sin kx \sin(k+1)x};$$

$$8) \sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{\cos kx \cos(k+1)x}.$$

14. Докажите при $d \neq 2\pi m$

$$a) \sum_{k=0}^n \sin(a+kd) = \frac{\sin \frac{n}{2} d \sin \left(a + \frac{n+1}{2} d \right)}{\sin \frac{d}{2}};$$

$$6) \sum_{k=1}^n \cos(a+kd) = \frac{\sin \frac{n}{2} d \cos \left(a + \frac{n+1}{2} d \right)}{\sin \frac{d}{2}}.$$

15. Выведите следующие формулы:

$$a) \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{2} + 1;$$

$$6) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{a}{2^n} - \operatorname{ctg} a;$$

$$B) \sum_{k=1}^n k \sin ka = \frac{(n+1) \sin na - n \sin(n+1)a}{4 \sin^2 \frac{a}{2}};$$

$$Г) \sum_{k=1}^n a^k \sin kx = \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin(n+1)x + a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2};$$

$$Д) \sum_{k=1}^n a^k \cos kx = \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos(n+1)x + a \cos x - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

16. Вычислите сумму рядов

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+d)};$$

$$6) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}.$$

17. Докажите следующие утверждения:

а) квадратное число есть сумма двух последовательных треугольных чисел (результат пифагорейцев);

б) $\Phi_k(n) = \Phi_{k-1}(n) + \Phi_3(n-1)$ (результат Никомаха);

в) восьмикратное треугольное число, увеличенное на 1, является квадратным (результат Диофанта, III в.);

г) если разбить ряд нечетных чисел на группы, число членов которых возрастает как натуральный ряд, то сумма чисел каждой группы равна кубу числа членов этой группы (результат Никомаха).

Н А М П И Ш У Т

Аномальные элементы

Существует ряд химических элементов, которые с полным правом могут быть названы *аномальными*. Это галлий Ga, германий Ge, висмут Bi, ксенон Xe и радон Rn. Аномальность их заключается в том, что при переходе соответствующего вещества из жидкого состояния в твердое его плотность не увеличивается, а уменьшается (см. таблицу). Из химических элементов они единственные в своем роде.

Но существует всем известное химическое соединение – вода, обладающая аналогичным свойством. Это свойство воды играет колоссальную роль в сохранении жизни на Земле. Если бы лед был плотнее воды, то северные реки и Северный Ледовитый океан промерзли бы до дна, жизнь в них была бы уничтожена. Все это могло бы привести к катастрофическому изменению климата с гибельными последствиями. И только благодаря аномальным свойствам воды этого не происходит.

Можно предположить, что и аномальные элементы играют существенную роль в природных процессах, пока только не ясно какую – положительную или отрицательную. Они могут быть как катализаторами, так и ингибиторами этих процессов. (Напомним, что катализаторы – это вещества, ускоряющие химические реакции. Биологические катализаторы называют ферментами. Ингибиторы – это вещества, снижающие скорость химических реакций или подавляющие их. Ингибиторы ферментов используют для изучения механизма их действия, а также для лечения нарушений обмена веществ.) Приведем интересную аналогию с углекислым газом. В микроколичествах он способствует дыханию за счет воздействия на нервные центры человека, в больших же количествах делает дыхание невозможным. Не исключено,

Таблица

	Ga	Ge	Bi	Xe	Rn	H ₂ O	
$T_{\text{пл}}$	302,95	1209,65	544,45	161,35	202,15	273,15	
$\rho_{\text{ж}}$	6095	5570	10049	2987	4400	1000	999,87
T	302,95	1209,65	614,05	165,05	211,15	277,13	273,15
$\rho_{\text{т}}$	5904	5326	9800	2700	4000	916,8	
T	293,15	298,15		133,15		273,15	

Здесь $T_{\text{пл}}$ – температура плавления вещества (измеряется в К), $\rho_{\text{ж}}$ – плотность вещества в жидком состоянии (измеряется в кг/м³), $\rho_{\text{т}}$ – плотность вещества в твердом состоянии (измеряется в кг/м³), T – температура замера плотности вещества (измеряется в К). К сожалению, не все замеры были проведены при температуре плавления, но это не меняет общую тенденцию. Кроме того, не обнаружены данные о температуре, при которой производились замеры плотности Bi и Rn в твердом состоянии.

что такую же двойную роль играют и аномальные элементы. Все это требует детального изучения.

Посмотрим, каковы концентрации аномальных элементов (в атомных частях) в земной коре:

$$\begin{aligned} \text{Ga} &= 400 \cdot 10^{-8}, \text{ Ge} = 200 \cdot 10^{-8}, \\ \text{Bi} &= 1,7 \cdot 10^{-8}, \text{ Rn} = 5 \cdot 10^{-19} \end{aligned}$$