Умножим каждое слагаемое на $2\sin\frac{a}{2}$ и преобразуем полученные произведения в разности:

$$2\sin\frac{a}{2}\sin ka = \cos\frac{2k-1}{2}a - \cos\frac{2k+1}{2}a = F(k) - F(k+1).$$

Откуда

$$2\sin\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \cos\frac{a}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}a = 2\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}.$$

Таким образом, при $a \neq 2\pi m$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin ka = \frac{\sin\frac{n+1}{2}a\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

В случае $a = 2\pi m$ сумма равна нулю.

Другие примеры читатели найдут в упражнениях.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Если по функции f не удается найти функцию F, удовлетворяющую (1), то стоит попытаться найти функцию F, удовлетворяющую какому-нибудь другому условию, например такому:

$$f(x) = x\left(F(x-1) - 2F(x) + F(x+1)\right).$$

При внимательном рассмотрении нетрудно увидеть, что выражение, стоящее в скобках, равно $\Delta F(x) - \Delta F(x-1) = \Delta(\Delta F(x-1)) = \Delta^2 F(x-1)$. И в этом случае при суммировании $f(k)$ все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются, в результате

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = nF(n+1) - (n+1)F(n) + F(0).$$

Пример 9. Вычислим сумму $\cos a + 2\cos 2a + \ldots + n\cos na$.

Упражнение 11. Покажите, что

$$4\cos ka\sin^2\frac{a}{2} = -\cos(k-1)a + 2\cos ka - \cos(k+1)a.$$

Умножая обе части равенства на k и суммируя по k, найдем при $a \neq 2\pi m$ искомую сумму

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos ka = \frac{(n+1)\cos na - n\cos(n+1)a - 1}{4\sin^2\frac{a}{2}}.$$

Этот результат можно вывести из формулы примера 8, если заметить, что $(\sin kx)' = k\cos kx$, и продифференцировать полученную там сумму, предварительно заменив в ней a на x. Предлагаем читателям проделать это самостоятельно.

Замечание 2. Предположим теперь, что по функции f удалось найти такую функцию F, для которой выполняется равенство

$$f(x) = F(x+1) - tF(x).$$

Тогда

$$\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(k+1)}{t^k} - \frac{F(k)}{t^{k-1}},$$

что позволяет найти сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(n+1)}{t^n} - F(1).$$

Приведем примеры.

Пример 10. Пусть $f(x) = x(3-x)$.

Так как $x(3-x) = x(x+1) - 2(x-1)x$, то $t = 2$, $F(x) = (x-1)x$, и

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k(3-k)}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

Пример 11. Вычислим сумму

$$-\cos a + \cos 2a - \cos 3a + \ldots + (-1)^n\cos na.$$

Запишем тождество

$$2\cos\frac{a}{2}\cos ka = \cos\frac{2k+1}{2}a + \cos\frac{2k-1}{2}a;$$

здесь $t = -1$, поэтому

$$2\cos\frac{a}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ka = (-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}a - \cos\frac{a}{2}.$$

Откуда при $a \neq \pi(2m+1)$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos ka = -\frac{1}{2} + (-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}a}{2\cos\frac{a}{2}}.$$

При $a = \pi(2m+1)$ каждое слагаемое равно единице, и сумма равна n.

Упражнения

12. Докажите равенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\ldots(a+(k+m)d)} =$$
$$= \frac{1}{md}\left(\frac{1}{(a+d)(a+2d)\ldots(a+md)} - \frac{1}{(a+(n+1)d)(a+(n+2)d)\ldots(a+(n+m)d)}\right)$$

и рассмотрите его частные случаи:

1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$;

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

13. Найдите следующие суммы:

1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)$;

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}$;

5) $\sum_{k=1}^{n}\log_a\left(1+\frac{1}{k}\right)$;