

Умножим каждое слагаемое на $2 \sin \frac{a}{2}$ и преобразуем полученные произведения в разности:

$$2 \sin \frac{a}{2} \sin ka = \cos \frac{2k-1}{2} a - \cos \frac{2k+1}{2} a = F(k) - F(k+1).$$

Откуда

$$2 \sin \frac{a}{2} \sum_{k=1}^n \sin ka = \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} a = 2 \sin \frac{n+1}{2} a \sin \frac{na}{2}.$$

Таким образом, при $a \neq 2\pi m$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \sin ka = \frac{\sin \frac{n+1}{2} a \sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

В случае $a = 2\pi m$ сумма равна нулю.

Другие примеры читатели найдут в упражнениях.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Если по функции f не удается найти функцию F , удовлетворяющую (1), то стоит попытаться найти функцию F , удовлетворяющую какому-нибудь другому условию, например такому:

$$f(x) = x(F(x-1) - 2F(x) + F(x+1)).$$

При внимательном рассмотрении нетрудно увидеть, что выражение, стоящее в скобках, равно $\Delta F(x) - \Delta F(x-1) = \Delta(\Delta F(x-1)) = \Delta^2 F(x-1)$. И в этом случае при суммировании $f(k)$ все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются, в результате

$$\sum_{k=1}^n f(k) = nF(n+1) - (n+1)F(n) + F(0).$$

Пример 9. Вычислим сумму $\cos a + 2 \cos 2a + \dots + n \cos na$.

Упражнение 11. Покажите, что

$$4 \cos ka \sin^2 \frac{a}{2} = -\cos(k-1)a + 2 \cos ka - \cos(k+1)a.$$

Умножая обе части равенства на k и суммируя по k , найдем при $a \neq 2\pi m$ искомую сумму

$$\sum_{k=1}^n k \cos ka = \frac{(n+1) \cos na - n \cos(n+1)a - 1}{4 \sin^2 \frac{a}{2}}.$$

Этот результат можно вывести из формулы примера 8, если заметить, что $(\sin kx)' = k \cos kx$, и продифференцировать полученную там сумму, предварительно заменив в ней a на x . Предлагаем читателям сделать это самостоятельно.

Замечание 2. Предположим теперь, что по функции f удалось найти такую функцию F , для которой выполняется равенство

$$f(x) = F(x+1) - tF(x).$$

Тогда

$$\frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(k+1)}{t^k} - \frac{F(k)}{t^{k-1}},$$

что позволяет найти сумму

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{t^k} = \frac{F(n+1)}{t^n} - F(1).$$

Приведем примеры.

Пример 10. Пусть $f(x) = x(3-x)$.

Так как $x(3-x) = x(x+1) - 2(x-1)x$, то $t = 2$, $F(x) = (x-1)x$, и

$$\sum_{k=1}^n \frac{k(3-k)}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

Пример 11. Вычислим сумму

$$-\cos a + \cos 2a - \cos 3a + \dots + (-1)^n \cos na.$$

Запишем тождество

$$2 \cos \frac{a}{2} \cos ka = \cos \frac{2k+1}{2} a + \cos \frac{2k-1}{2} a;$$

здесь $t = -1$, поэтому

$$2 \cos \frac{a}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos ka = (-1)^n \cos \frac{2n+1}{2} a - \cos \frac{a}{2}.$$

Откуда при $a \neq \pi(2m+1)$ получаем

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos ka = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos \frac{2n+1}{2} a}{2 \cos \frac{a}{2}}.$$

При $a = \pi(2m+1)$ каждое слагаемое равно единице, и сумма равна n .

Упражнения

12. Докажите равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(a+kd)(a+(k+1)d)\dots(a+(k+m)d)} = \\ = \frac{1}{md} \left(\frac{1}{(a+d)(a+2d)\dots(a+md)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(a+(n+1)d)(a+(n+2)d)\dots(a+(n+m)d)} \right) \end{aligned}$$

и рассмотрите его частные случаи:

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$;
- 3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;
- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$.

13. Найдите следующие суммы:

- 1) $\sum_{k=1}^n (2k-1)(2k+1)$;
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;
- 3) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;
- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!}$;
- 5) $\sum_{k=1}^n \log_a \left(1 + \frac{1}{k} \right)$;