Упражнение 8. Покажите, пользуясь этим определением, что q-угольноое число с номером n задается формулой

$$\Phi_q(n) = \frac{n}{2}\left((n-1)(q-2)+2\right).$$

Откуда, в частности, имеем

$$\Phi_3(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)^{(2)}}{2},\ \Phi_4(n) = n^2.$$

Фигурные числа обладают многими интересными свойствами (см. далее упражнение 17). Одно из самых замечательных их свойств было установлено П.Ферма: *всякое натуральное число является суммой не более трех треугольных чисел, не более четырех квадратных, не более пяти пятиугольных чисел и т.д.* Доказано оно было О.Коши в 1815 году.

Пример 5. А теперь сложим из одинаковых шаров правильный *тетраэдр* – треугольную пирамиду, все грани которой правильные треугольники. Сначала плотно уложим на плоскости шары нижнего слоя в виде правильного треугольника со стороной n (в каждой стороне содержится n шаров); в углублениях между шарами нижнего слоя разместим шары следующего слоя и т.д. Количество шаров каждого слоя выражается соответствующим треугольным числом, а поэтому количество шаров, из которых сложен тетраэдр, выражается суммой

$$\Phi_3^{(3)}(n) = \Phi_3(n) + \Phi_3(n-1) + \ldots + \Phi_3(1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Числа $\Phi_3^{(3)}$ называют *тетраэдрическими*, они представляют собой обобщение треугольных чисел на случай трехмерного пространства. Чтобы это подчеркнуть, мы добавили верхний индекс 3; для плоского случая индекс 2 мы не писали.

Пример 6. Из шаров можно сложить и правильную 4-угольную пирамиду. Число шаров нижнего слоя такой пирамиды равно $\Phi_4(n)$, а их количество во всей пирамиде равно

$$\Phi_4^{(3)}(n) = \Phi_4(n) + \Phi_4(n-1) + \ldots + \Phi_4(1) = \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Числа $\Phi_4^{(3)}(n)$ называют *пирамидальными.* С тетраэдрическими и пирамидальными числами были знакомы пифагорейцы, им и принадлежит идея выкладывания пирамид из одинаковых шаров. Но они не строили q-угольных пирамид для $q > 4$: ведь в этом случае невозможно на правильный q-угольник, сложенный из шаров, уложить новый слой той же формы из меньшего числа шаров так, чтобы шары лежали плотно и не скатывались. Мы же можем пойти дальше.

Пример 7. Найдем сумму q-угольных чисел для любого q, уже не обращаясь к геометрическому истолкованию этих сумм.

$$\Phi_q^{(3)}(n) = \sum_{k=1}^{n}\Phi_q(k) = \sum_{k=1}^{n}k\left(1 + \frac{(k-1)(q-2)}{2}\right) = 1+2+3+\ldots+n+\frac{q-2}{2}\sum_{k=1}^{n}k^{(2)} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{q-2}{2}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)}{6}\left((n-1)(q-2)+3\right).$$

И тем более античные ученые, мыслившие геометрически, не могли себе даже позволить обобщения тех же тетраэдрических и пирамидальных чисел, не говоря уже об аналогах любого q-угольного числа, на случай четырехмерного пространства. Попытки выйти из трехмерного пространства в пространство большей размерности рассматривались тогда как противоречащие здравому смыслу. Даже в III веке н.э. александрийский математик Папп писал: «Не существует ничего, что заключало бы больше, чем три измерения». Ну а мы займемся «строительством» правильных q-угольных пирамид в четырехмерном пространстве. Обозначим

$$\Phi_q^{(4)}(n) = \Phi_q^{(3)}(1) + \Phi_q^{(3)}(2) + \ldots + \Phi_q^{(3)}(n).$$

Упражнение 9. Покажите, что

$$\Phi_q^{(4)}(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{4!}\left((n-1)(q-2)+4\right).$$

Продолжая обобщать q-угольные числа на пространства большей размерности, определим сумму

$$\Phi_q^{(m)}(n) = \Phi_q^{(m-1)}(1) + \Phi_q^{(m-1)}(2) + \ldots + \Phi_q^{(m-1)}(n).$$

Упражнение 10. Индукцией по m докажите, что

$$\Phi_q^{(m)}(n) = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-2)}{m!}\left((n-1)(q-2)+m\right).$$

В частности, при $q = 3$ получаем

$$\Phi_3^{(m)}(n) = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}.$$

Это – обобщение треугольных чисел на случай m-мерного пространства. Поскольку многомерное обобщение треугольника называют симплексом (от лат. simplex – простой), то числа $\Phi_3^{(m)}(n)$ естественно назвать *m-мерными симплициальными.* Числа эти появились уже у Нарайаны при решении задачи, сформулированной в начале статьи. Теперь мы можем привести решение Нарайаны, используя наши обозначения.

1. Корова приносит $20 = \Phi_3^{(1)}(20)$ телок первого поколения.

2. Первая телка первого поколения дает 17 телок второго поколения, вторая – 16 и т.д. Всего будет 17 + 16 + 15 + … … + 1 телок второго поколения. В результате получаем число $\Phi_3^{(2)}(17) = 153$.

3. Подсчитывая потомство телок второго поколения, приходим к сумме $\Phi_3^{(2)}(14) + \Phi_3^{(2)}(13) + \ldots + \Phi_3^{(2)}(1)$. А она равна $\Phi_3^{(3)}(14) = 560$.

4. Продолжая рассуждать дальше, найдем численность всего потомства:

$$\Phi_3^{(1)}(20) + \Phi_3^{(2)}(17) + \Phi_3^{(3)}(14) + \Phi_3^{(4)}(11) + \Phi_3^{(5)}(8) + \Phi_3^{(6)}(5) + \Phi_3^{(7)}(2) =$$

$$= 20 + 153 + 560 + 1001 + 792 + 210 + 8 = 2744.$$

Итак, в течение 20 лет от одной коровы появится стадо численностью в 2745 голов.

Все рассмотренные до сих пор примеры касались суммирования степенных функций. И у читателя может создаться впечатление, что для других функций формула (2) не годится. На самом деле это не так.

Пример 8. Вычислим следующую сумму:

$$\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin na.$$