сумму S_n^m. Разберем для примера случай $m = 2$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} k^{(2)} = \frac{(n+1)^{(3)}}{3}, \text{ или } \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}, \text{ то}$$

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{(2)} + \sum_{k=1}^{n} k =$$

$$= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Этот прием позволяет найти суммы S_n^m при любом показателе m, зная формулы для соответствующих сумм с меньшими показателями.

Упражнение 6. Вычислите таким способом $S_n^3, S_n^4, S_n^5, S_n^6$.

Одним из первых способ суммирования, использующий формулу (2), применил к вычислению S_n^m французский математик Б.Паскаль. Он даже рассмотрел суммы более общего вида, когда основания степеней образуют произвольную арифметическую прогрессию.

Пример 4. Вычислим, вслед за Паскалем, сумму

$$Q_m = a^m + (a+d)^m + \ldots + (a+(n-1)d)^m.$$

Воспользуемся биномом Ньютона – формулой возведения двучлена в m-ю степень:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k,$$

где $C_m^k = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ – биномиальные коэффициенты. Тогда

$$(a+d)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 a^m d + C_{m+1}^2 a^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$(a+2d)^{m+1} - (a+d)^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^1 (a+d)^m d + C_{m+1}^2 (a+d)^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$(a+nd)^{m+1} - (a+(n-1)d)^{m+1} =$$

$$= C_{m+1}^1 (a+(n-1)d)^m d + C_{m+1}^2 (a+(n-1)d)^{m-1} d^2 + \ldots + d^{m+1}.$$

Складывая левые и правые части равенств, получим

$$(a+nd)^{m+1} - a^{m+1} = C_{m+1}^1 Q_m d +$$

$$+ C_{m+1}^2 Q_{m-1} d^2 + C_{m+1}^3 Q_{m-2} d^3 + \ldots + nd^{m+1}. \quad (7)$$

Применим формулу (7) для вычисления некоторых Q_m (учитывая равенство $C_{m+1}^k = 0$ при $k > m+1$). Значения $Q_0 = n$ и $Q_1 = \dfrac{2a+(n-1)d}{2} n$ нам хорошо известны. Найдем Q_2. Положим в (7) $m = 2$: $(a+nd)^3 - a^3 = 3Q_2 d + 2Q_1 d^2 + Q_0 d^3$. Откуда

$$Q_2 = n\left(a^2 + a(n-1)d + \frac{d^2}{6}\left(2n^2 - n + 1\right)\right).$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = n\frac{4n^2-1}{3}, \quad \sum_{k=1}^{n} (3k-2)^2 = n\frac{6n^2-3n-1}{2}.$$

Упражнение 7. Найдите Q_3 и убедитесь в верности равенства

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2\left(2n^2-1\right).$$

Решим, используя обобщенную степень, несколько интересных геометрических задач. В частности, найдем число одинаковых шаров, из которых сложены правильные пирамиды. Но прежде чем обращаться к пирамидам, рассмотрим правильные многоугольники, выложенные на плоскости из шаров.

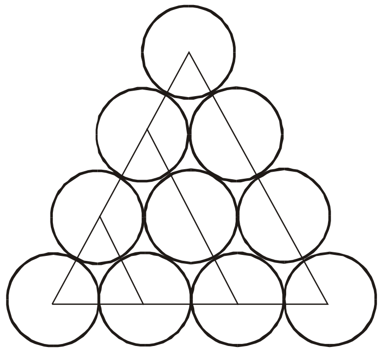

Рис. 3

Начнем с треугольника. Возьмем один шар, к нему приложим еще два так, чтобы образовался треугольник, каждая сторона которого содержит два шара. Затем к этим шарам приложим еще три, так чтобы снова получился треугольник (рис.3), но уже со стороной в три шара. Далее можно выложить треугольник с четырьмя шарами в каждой стороне и т.д. Выпишем последовательность чисел, выражающих количества шаров, составляющих полученные правильные треугольники:

1, 3, 6, 10, …

Эти числа называют *треугольными.* Аналогично из шаров строят квадраты, пятиугольники и другие правильные многоугольники, растущие из какой-либо одной своей вершины (рис.4, 5). Количества используемых при этом шаров представляют собой соответственно *квадратные числа*

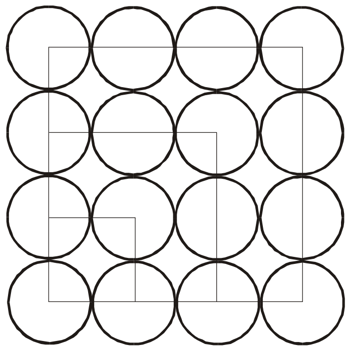

Рис. 4

1, 4, 9, 16, …,

пятиугольные числа

1, 5, 12, 22, …

и т.д.

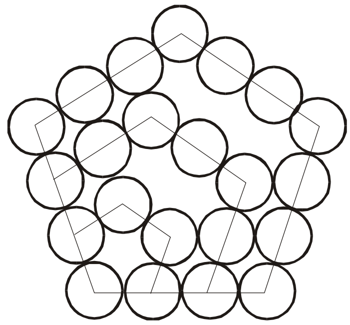

Рис. 5

Идея выкладывания шаров на плоскости в виде правильных многоугольников восходит к школе Пифагора. Пифагорейцами было подмечено, что n-е треугольное число представляет собой сумму первых n натуральных чисел, n-е квадратное – сумму первых n нечетных чисел, n-е пятиугольное – сумму n членов прогрессии 1, 4, 7, 10, … $(3n-2)$, … Это позволило им дать общее определение *q-угольного числа* с номером n как суммы n членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $q - 2$.