

М1800. Докажите, что сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов площадей трех его сечений, каждое из которых проходит через середины четырех ребер.

Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема косинусов для тетраэдра. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3 – площади граней тетраэдра, α_{ij} – двугранный угол между гранями с площадями S_i и S_j . Тогда

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos \alpha_{12} - 2S_1S_3 \cos \alpha_{13} - 2S_2S_3 \cos \alpha_{23}.$$

Доказательство. Так как площадь любой грани тетраэдра равна сумме площадей проекций на нее остальных граней, имеем

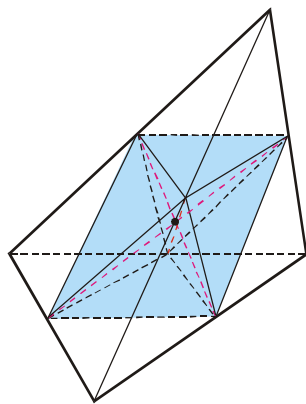
$$S_0 = S_1 \cos \alpha_{01} + S_2 \cos \alpha_{02} + S_3 \cos \alpha_{03},$$

$$S_1 = S_0 \cos \alpha_{01} + S_2 \cos \alpha_{12} + S_3 \cos \alpha_{13},$$

$$S_2 = S_0 \cos \alpha_{02} + S_1 \cos \alpha_{12} + S_3 \cos \alpha_{23},$$

$$S_3 = S_0 \cos \alpha_{03} + S_1 \cos \alpha_{13} + S_2 \cos \alpha_{23}.$$

Умножив второе равенство на S_1 , третье на S_2 , четвертое на S_3 и вычтя из их суммы первое, умноженное на S_0 , получим утверждение теоремы.

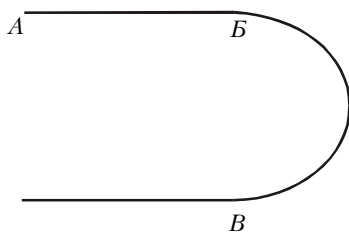


Теперь четырьмя плоскостями, параллельными граням тетраэдра и проходящими через середины его ребер, отрезем от него четыре вдвое меньших тетраэдра. Получим многогранник, ограниченный 8 треугольниками. Серединные сечения исходного тетраэдра разбивают этот многогранник на 8 тетраэдров, основания которых равны

уменьшенным вдвое граням исходного, а боковые грани – четвертям его серединных сечений (см. рисунок). Если применить к каждому из них теорему косинусов и сложить полученные равенства, то каждое из удвоенных произведений войдет в сумму с противоположными знаками, и в результате будет получено утверждение задачи.

А.Заславский

Ф1808. Траектория точки состоит из отрезка прямой AB длиной L и полуокружности BV радиусом R , причем прямая касается окружности (см. рисунок). За какое минимальное время точка проедет из A в B ? Начальная скорость равна нулю, а ускорение все время постоянно по величине и равно a .



Скорость движения точки по окружности при заданных в условии ограничениях не может превышать $v_m = \sqrt{aR}$. Следовательно, к момен-

ту перехода на окружность необходимо иметь именно такую скорость (больше нельзя – не удержаться на окружности, а меньше – нет смысла). Для разгона по прямой от нуля до этой скорости нужно пройти путь $L_0 = v_m^2 / (2a) = R/2$. Если $L < L_0$, то задача сильно усложняется – придется «доразогнаться» на окружности, а там касательная составляющая ускорения уже не постоянна (решение задачи про разгон на окружности – Ф1583 – см. в «Кванте» №3 за 1997 г.). При $L > L_0$ все довольно просто – нужно разогнаться до максимально возможной скорости, а затем начать торможение и к концу отрезка AB снизить скорость до $v_m = \sqrt{aR}$. Обозначим время дополнительного разгона через t (столько же займет и торможение). Тогда для этого времени t получим уравнение

$$\frac{1}{2}(L - L_0) = v_m t + \frac{1}{2} a t^2,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{L + R/2}{a}} - \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Теперь легко найти полное минимальное время движения:

$$T = \frac{L_0}{v_m/2} + 2t + \frac{\pi R}{v_m} = (\pi - 1)\sqrt{\frac{R}{a}} + 2\sqrt{\frac{L + R/2}{a}}.$$

А.Простов

Ф1809. Три маленьких груза массой M каждый соединены тонкими легкими стержнями длиной L , образуя треугольную конструкцию ABV . Этот треугольник скользит по гладкому горизонтальному столу. В некоторый момент скорость точки A направлена вдоль AB и равна v , а скорость точки B в этот же момент параллельна BV . Найдите скорость точки V и силу натяжения стержней.

Стол гладкий и горизонтальный, поэтому скорость центра масс системы ABV постоянна и угловая скорость вращения тоже не меняется. Проекция скорости точки B на AB равна проекции скорости точки A на AB , тогда мгновенная скорость точки B равна $v_B = 2v$, а ее «перпендикулярная» составляющая равна $2v \sin 60^\circ = v\sqrt{3}$. В связанной с точкой A системе отсчета скорость точки B определяется ее вращением вокруг A , т.е. равна $v\sqrt{3}$, такая же скорость вращения и у точки V (она направлена перпендикулярно AV). В неподвижной системе осталось сложить векторы \vec{v} и $\vec{v}\sqrt{3}$. Поскольку угол между ними равен 150° , по теореме косинусов квадрат искомой скорости равен $(v^2 + 3v^2 - 2v\sqrt{3} \cos 150^\circ) = 7v^2$. Тогда мгновенная скорость точки V равна $v\sqrt{7}$.

Угловую скорость вращения системы ABV можно найти множеством разных способов. Рассмотрим, например, поворот отрезка AB за очень малый интервал времени. В поступательно движущейся со скоростью v вдоль направления AB системе отсчета точка A неподвижна, а скорость точки B равна $v\sqrt{3}$ и перпендикулярна AB , тогда угловая скорость равна $\omega = (v\sqrt{3})/L$.