М1800. *Докажите, что сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов площадей трех его сечений, каждое из которых проходит через середины четырех ребер.*

Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема косинусов для тетраэдра. Пусть S_0, S_1, S_2, S_3 – площади граней тетраэдра, α_{ij} – двугранный угол между гранями с площадями S_i и S_j. Тогда

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} - $$
$$- 2S_1S_3\cos\alpha_{13} - 2S_2S_3\cos\alpha_{23}.$$

Доказательство. Так как площадь любой грани тетраэдра равна сумме площадей проекцией на нее остальных граней, имеем

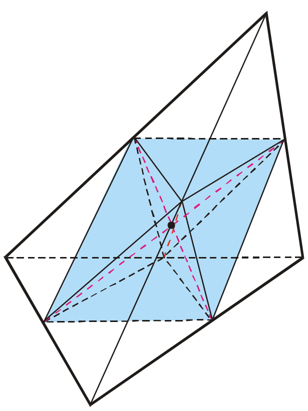
$$S_0 = S_1\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{02} + S_3\cos\alpha_{03},$$

$$S_1 = S_0\cos\alpha_{01} + S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13},$$

$$S_2 = S_0\cos\alpha_{02} + S_1\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{23},$$

$$S_3 = S_0\cos\alpha_{03} + S_1\cos\alpha_{13} + S_2\cos\alpha_{23}.$$

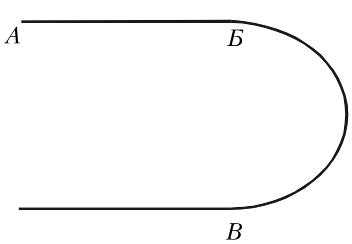
Умножив второе равенство на S_1, третье на S_2, четвертое на S_3 и вычтя из их суммы первое, умноженное на S_0, получим утверждение теоремы.



Теперь четырьмя плоскостями, параллельными граням тетраэдра и проходящими через середины его ребер, отрежем от него четыре вдвое меньших тетраэдра. Получим многогранник, ограниченный 8 треугольниками. Серединные сечения исходного тетраэдра разбивают этот многогранник на 8 тетраэдров, основания которых равны уменьшенным вдвое граням исходного, а боковые грани – четвертям его серединных сечений (см. рисунок). Если применить к каждому из них теорему косинусов и сложить полученные равенства, то каждое из удвоенных произведений войдет в сумму с противоположными знаками, и в результате будет получено утверждение задачи.

А.Заславский

Ф1808. *Траектория точки состоит из отрезка прямой АБ длиной L и полуокружности БВ радиусом R, причем прямая касается окружности (см. рисунок). За какое минимальное время точка проедет из А в В? Начальная скорость равна нулю, а ускорение все время постоянно по величине и равно a.*



Скорость движения точки по окружности при заданных в условии ограничениях не может превышать $v_m = \sqrt{aR}$. Следовательно, к моменту перехода на окружность необходимо иметь именно такую скорость (больше нельзя – не удержаться на окружности, а меньше – нет смысла). Для разгона по прямой от нуля до этой скорости нужно пройти путь $L_0 = v_m^2/(2a) = R/2$. Если $L < L_0$, то задача сильно усложняется – придется «доразгоняться» на окружности, а там касательная составляющая ускорения уже не постоянна (решение задачи про разгон на окружности – Ф1583 – см. в «Кванте» №3 за 1997 г.). При $L > L_0$ все довольно просто – нужно разогнаться до максимально возможной скорости, а затем начать торможение и к концу отрезка $АБ$ снизить скорость до $v_m = \sqrt{aR}$. Обозначим время дополнительного разгона через t (столько же займет и торможение). Тогда для этого времени t получим уравнение

$$\frac{1}{2}\left(L - L_0\right) = v_m t + \frac{1}{2}at^2,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{L + R/2}{a}} - \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Теперь легко найти полное минимальное время движения:

$$T = \frac{L_0}{v_m/2} + 2t + \frac{\pi R}{v_m} = (\pi - 1)\sqrt{\frac{R}{a}} + 2\sqrt{\frac{L + R/2}{a}}.$$

А.Простов

Ф1809. *Три маленьких груза массой М каждый соединены тонкими легкими стержнями длиной L, образуя треугольную конструкцию АБВ. Этот треугольник скользит по гладкому горизонтальному столу. В некоторый момент скорость точки А направлена вдоль АБ и равна v, а скорость точки Б в этот же момент параллельна БВ. Найдите скорость точки В и силу натяжения стержней.*

Стол гладкий и горизонтальный, поэтому скорость центра масс системы $АБВ$ постоянна и угловая скорость вращения тоже не меняется. Проекция скорости точки $Б$ на $АБ$ равна проекции скорости точки $А$ на $АБ$, тогда мгновенная скорость точки $Б$ равна $v_Б = 2v$, а ее «перпендикулярная» составляющая равна $2v\sin 60^\circ = v\sqrt{3}$. В связанной с точкой $А$ системе отсчета скорость точки $Б$ определяется ее вращением вокруг $А$, т.е. равна $v\sqrt{3}$, такая же скорость вращения и у точки $В$ (она направлена перпендикулярно $АВ$). В неподвижной системе осталось сложить векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}\sqrt{3}$. Поскольку угол между ними равен 150°, по теореме косинусов квадрат искомой скорости равен $\left(v^2 + 3v^2 - 2vv\sqrt{3}\cos 150^\circ\right) = 7v^2$. Тогда мгновенная скорость точки $В$ равна $v\sqrt{7}$.

Угловую скорость вращения системы $АБВ$ можно найти множеством разных способов. Рассмотрим, например, поворот отрезка $АБ$ за очень малый интервал времени. В поступательно движущейся со скоростью v вдоль направления $АБ$ системе отсчета точка $А$ неподвижна, а скорость точки $Б$ равна $v\sqrt{3}$ и перпендикулярна $АБ$, тогда угловая скорость равна $\omega = \left(v\sqrt{3}\right)/L$.