Ф1832. Плоская монохроматическая волна с длиной $\lambda = 0{,}55$ мкм падает перпендикулярно на очень тонкий плоский непрозрачный лист. В листе прорезаны две длинные параллельные щели шириной 0,5 мм и 1 мм, а расстояние между ближайшими краями щелей составляет 0,5 мм. На расстоянии 10 м от листа параллельно ему расположен экран для наблюдения интерференции. На каком расстоянии от главного максимума располагается ближайшая серая полоса? Рассчитайте то же для ближайшей черной полосы.

А.Волнов

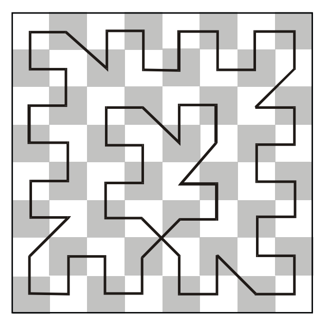
Решения задач М1796–М1800, Ф1808–Ф1817

М1796. *Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломаная из 64 звеньев (каждому ходу соответствует одно звено). Оказалось, что никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее возможное число диагональных ходов равно 8.*

Назовем угловое поле и еще два поля, соседние с ним по стороне, *угловой группой*. Всего, таким образом, получим 4 угловые группы. Докажем, что хотя бы одна клетка каждой угловой группы является концом (или, если хотите, началом) диагонального звена. Для этого допустим обратное – что это не так, и рассмотрим любую уголовую группу, для определенности левую нижнюю (поля a1, a2 и b1). Так как от поля a1 не отходит диагональное звено, то поле a1 соединяется «прямыми» звеньями с полями a2 и b1. Далее, от полей a2 и b1 диагональные ходы не отходят, и, кроме того, поле a2 не может соединяться с полем a3 (так как получатся два соседних звена a1-a2-a3, лежащих на одной прямой), а также поле b1 не может соединяться с полем c1 (по аналогичной причине). Что же выходит? Единственные возможные звенья, отходящие от полей a2 и b1, ведут в одно и то же поле b2. Противоречие. Значит, хотя бы одна клетка каждой угловой группы является концом диагонального звена. Заметим также, что никакие две клетки из разных угловых групп не могут соединяться *общим* диагональным звеном (слишком далеко они расположены одна от другой). Таким образом, как минимум 4 диагональных хода (вблизи углов) должны быть.

Запомним пока этот результат и введем еще кое-какие термины. А именно: центральную часть доски размером 4×4 назовем *середкой*, а все остальное – *каймой* (с «шириной», равной 2 клеткам). Понятно, что должны быть ходы, соединяющие середку и кайму между собой (поскольку король обошел *всю* доску). Докажем следующий факт: *любой ход, соединяющий середку и кайму, либо сам диагональный, либо каждому такому ходу можно поставить в соответствие диагональный ход, целиком лежащий на кайме (причем этот ход не является ни одним из рассмотренных выше «вблизиугольных» ходов).* Итак, рассмотрим любой ход, соединяющий середку и кайму. Если он диагональный, то доказывать здесь нечего. Пусть он не диагональный, а «прямой». Для определенности рассмотрим ход, которому соответствует звено d2-d3 (для других ходов доказательство аналогично). Тогда хотя бы одно звено, отходящее от поля d1, должно быть диагональным. В самом деле, звена d1-d2 быть не может (ибо тогда соседние звенья d1-d2-d3 лежали бы на одной прямой), и если диагонального звена нет, то остается единственная возможность: звенья c1-d1-e1, опять-таки лежащие на одной прямой. Таким образом, каждому «прямому» ходу, соединяющему середку и кайму, соответствует диагональный ход на кайме (или сам этот ход является диагональным). Отметим напоследок, что никакой из этих диагональных ходов не является одновременно каким-либо из ранее рассмотренных диагональных ходов «вблизи углов».

Итак, если центр и середку соединяют N ходов, то (с учетом «вблизиугольных» диагональных ходов) общее число диагональных ходов не меньше $N + 4$. Так как путь короля замкнутый, то сколько раз король переходит с каймы на середку, столько раз и возвращается обратно. Поэтому N – четное число. Если $N \geq 4$, то общее число диагональных ходов получается не меньше 8. Рассмотрим отдельно случай $N = 2$ и убедимся, что и здесь общее число диагональных ходов не меньше 8. Для этого докажем, что при $N = 2$ *внутри* середки *непременно* будет хотя бы два диагональных хода. Итак, пусть некоторые две (ровно две!) клетки на границе середки соединены звеньями с какими-то полями каймы. Разобьем середку на 4 квадрата размером 4×4. В силу вечного принципа Дирихле хотя бы два из них *не содержат* ни одной из этих самых двух клеток, соединенных с каймой. Пусть для определенности один из этих квадратов – левая нижняя четвертушка середки, т.е. состоит из полей c3, c4, d3 и d4. Докажем, что хотя бы от одной из трех клеток – c3, c4, d3 – отходит диагональное звено. Как доказать? Да очень просто – точно так же, как мы в начале решения доказывали наличие диагонального звена, отходящего хотя бы от одного из полей a1, a2, b1. В самом деле, кроме двух звеньев, середка не имеет ничего общего с каймой, так что клетки c3, c4, d3 являются такими же угловыми полями для середки – своеобразной «внутренней доски». И доказательство совершенно аналогично.



Таким образом, если середка соединена с каймой ровно двумя звеньями, то внутри середки есть еще по крайней мере два диагональных звена.

Итак, всего на доске не меньше 8 диагональных ходов. С другой стороны, путь короля, содержащий ровно 8 диагональных ходов, существует (см. рисунок). Так что окончательный ответ: 8.

И.Акулич

М1797. *Красные и синие точки, строго чередуясь, разделили окружность на 2n дуг. Из них любые две смежные дуги различаются по длине на 1. Докажите, что n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.*