г) *Рассмотрим для некоторого такого параллелограмма OABC порожденную им решетку, т.е. множество таких точек P, что* $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC}$, *где m, n – целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами* $xy = \pm 1$, *содержит лишь одну точку этой решетки – начало координат.*

В авторском варианте задача имела продолжение: *а на самих гиперболах* $xy = \pm 1$ *лежит бесконечно много точек решетки*! Редакция вычеркнула это, убоявшись, что задача покажется читателю слишком сложной. Но мы, разумеется, решим и неопубликованный пункт.

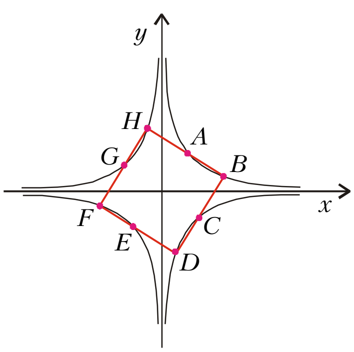

Рис.1

Решение задачи М1775. а) Проанализируем ситуацию. Пусть искомый квадрат существует и выглядит так, как показано на рисунке 1. Обозначим координаты точки A – середины стороны квадрата – через $\left(a; \frac{1}{a}\right)$. Тогда, как легко видеть, $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{a}; -a\right)$, так что точка B имеет координаты $\left(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a\right)$. Условие принадлежности точки B гиперболе $xy = 1$ дает уравнение

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a} - a\right) = 1,$$

откуда $\frac{1}{a^2} - a^2 = 1$. Этому уравнению удовлетворяет число $a = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}$. Анализ окончен.

Теперь легко предъявить искомый квадрат: при найденном значении a все четыре точки $B\left(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a\right)$, $D\left(-a + \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} - a\right)$, $F\left(-a - \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} + a\right)$, $H\left(a - \frac{1}{a}; \frac{1}{a} + a\right)$ (вершины квадрата) и точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $C\left(\frac{1}{a}; -a\right)$, $E\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$, $G\left(-\frac{1}{a}; a\right)$ (середины сторон) лежат на гиперболах $xy = \pm 1$.

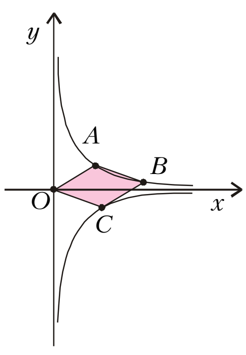

Рис.2

Упражнение 19. Докажите, что если все вершины и все середины сторон квадрата лежат на гиперболах $xy = \pm 1$, то центр этого квадрата – начало координат.

б) Рассмотрим точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C\left(c; -\frac{1}{c}\right)$, а также начало координат $O(0; 0)$ (рис.2). Вершина B параллелограмма $OABC$ имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$. Она лежит на гиперболе $xy = 1$ при условии

$$(a + c)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = 1,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{c}{a} - \frac{a}{c} = 1,$$

т.е.

$$\frac{c}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Осталось заметить, что последнему условию удовлетворяют бесконечно много пар чисел a и c.

в) Легко доказать, что площадь S параллелограмма $OABC$, где O – начало координат, $\overrightarrow{OA} = (a; b)$ и $\overrightarrow{OC} = (c; d)$, равна $S = |ad - bc|$. Подставляя $b = \frac{1}{a}$ и $d = -\frac{1}{c}$, находим

$$S = \left|\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{2}{1 \pm \sqrt{5}} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right| = \sqrt{5},$$

что и требовалось доказать.

Но решение еще не закончено! Дело в том, что параллелограмм может выглядеть так, как показано на рисунке 3. Его вершины $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$ лежат на гиперболе $xy = 1$. Точка B имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$. Чтобы она принадлежала гиперболе $xy = -1$, должно быть выполнено равенство

$$(a + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = -1,$$

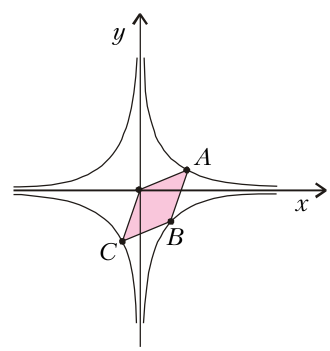

Рис.3

т.е. $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = -3$. Площадь параллелограмма $OABC$ равна

$$S = \left|\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 - 4} = \sqrt{(-3)^2 - 4} = \sqrt{5}.$$

г) Рассмотрим порожденную параллелограммом рисунка 2 решетку (рис.4). Для произвольной точки $P(x; y)$ этой решетки $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma + nc; \frac{m}{a} - \frac{n}{c}\right)$, где m, n – целые числа,