доказали, что уравнение $x^2-3y^2=-1$ не имеет решений в целых числах.

**Упражнение 14.** Может ли сумма квадратов а) трех; б) четырех; в) пяти; г) шести; д) семи; е) восьми; ж) девяти; з) десяти; и) двенадцати последовательных целых чисел быть квадратом целого числа?

### Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$

Уравнение $x^2-3y^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Чтобы доказать это, мы, как и в теореме 1, укажем формулы, которые из решения $(x;y)$ строят новое решение $(X;Y)$. А именно, пару $(1;0)$ эти формулы преобразуют в $(2;1)$, пару $(2;1)$ – в $(7;4)$, которую, в свою очередь, они преобразуют в $(26;15)$. Следующая пара, как помните, $(97;56)$.

Что же это за формулы? Немного терпения и удачи, и вы заметите, что $97=2\cdot 26+3\cdot 15$ и $56=26+2\cdot 15$.

Впрочем, можно получить формулу $(x;y)\to(2x+3y;x+2y)$ и более «научным» способом, если использовать иррациональности. Смотрите:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3},$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^3=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}.$$

Мы получили решения $(7;4)$ и $(26;15)$ уравнения $x^2-3y^2=1$.

Если

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=x+y\sqrt{3},$$

то

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}=\left(x+y\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=$$
$$=(2x+3y)+(x+2y)\sqrt{3},$$

что и дает нужную нам формулу.

Вообще, давайте равенство

$$2^2-3=1$$

запишем в виде

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1,$$

а затем возведем обе части в $n$-ю степень:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n=1.$$

Обозначив через $x_n$ и $y_n$ такие натуральные числа, что

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{3},$$

получим, заменив знаки перед $\sqrt{3}$, равенство

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{3}.$$

(Переход к сопряженным числам законен по той же причине, что и для $\sqrt{2}$.) Следовательно,

$$1=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\left(x_n+y_n\sqrt{3}\right)\left(x_n-y_n\sqrt{3}\right)=x_n^2-3y_n^2.$$

Значит, пара

$$(x_n;y_n)=\left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2};\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}\right)$$

– решение уравнения $x^2-3y^2=1$. Других решений в натуральных числах, как следует из сформулированной ниже теоремы 5, у этого уравнения нет.

**Теорема 4.** *Если $x^2-3y^2=1$, то пара чисел $(X;Y)=(2x+3y;x+2y)$ удовлетворяет равенству $X^2-3Y^2=1$.*

**Теорема 5.** *Уравнение $x^2-3y^2=1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1;0)$ при помощи правила $(x;y)\to(2x+3y;x+2y)$.*

Доказательство теоремы 5 отложим на будущее, а теорему 4 докажем:

$$(2x+3y)^2-3(x+2y)^2=4x^2+12xy+9y^2-$$
$$-3\left(x^2+4xy+4y^2\right)=x^2-3y^2=1.$$

Фокус вновь удался. Интересно, что мы будем делать, когда $d$ будет не таким маленьким и догадаться до правила, которое «размножает» решения, будет сложно? Да и всегда ли такое правило существует? Не будем пока отвечать на эти законные вопросы. Подождите – вскоре и это, и многое другое прояснится.

**Упражнения**

**15.** Докажите следующие утверждения.

а) Уравнение $(x+1)^3-x^3=y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

б) (М960) Если квадрат некоторого натурального числа $n$ представим в виде разности кубов последовательных целых чисел, то число $n$ есть сумма квадратов двух последовательных целых чисел.

в) Уравнение $(x+2)^3-x^3=y^2$ не имеет решений в целых числах.

**16.** Если натуральные числа $k$, $m$ и $n$ удовлетворяют равенству $m+n\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^k$, где $k$ а) нечетно; б) четно, то число а) $\sqrt{m-1}$; б) $\sqrt{(m+1)/2}$ целое. Докажите это.

**17.** а) Пусть $p$ – простое число и $x^2-py^2=1$, где $x$, $y$ – натуральные числа. Докажите, что если $x$ (не)четно, то одно из чисел $x-1$ или $x+1$ является (удвоенным) квадратом.

б) Существуют ли такие натуральные числа $x$, $y$, $d$, что $x^2-dy^2=1$ и ни одно из чисел $x-1$ и $x+1$ не является ни квадратом, ни удвоенным квадратом?

**18.** Пусть $n$ – целое неотрицательное число. Докажите, что число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]$ делится на $2^{n+1}$ и не делится на $2^{n+2}$.

### Гиперболы и решетки

Мы уже долго занимаемся алгеброй и арифметикой. Наверное, стоит чуть отвлечься на геометрию – там тоже встречаются интересные для нас явления. В «Задачнике «Кванта» недавно опубликована следующая задача Н.Осипова.

**М1775.** а) *Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy=\pm1$?*

б) *Докажите, что существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых – начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy=1$, а четвертая – на гиперболе $xy=-1$.*

в) *Докажите, что площадь любого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$.*