можем получить новую пару:

$$Z = (z+2y) + 2(z+y) = 3z + 4y,$$
$$Y = (z+2y) + (z+y) = 2z + 3y,$$

удовлетворяющую равенству $Z^2 - 2Y^2 = -1$. Давайте проверим это:

$$(3z+4y)^2 - 2(2z+3y)^2 = 9z^2 + 24zy + 16y^2 - \\ - 2\left(4z^2 + 12zy + 9y^2\right) = z^2 - 2y^2 .$$

(Никакой логической необходимости в последней проверке нет. Но, согласитесь, приятно убедиться, что мы не ошиблись в вычислениях.)

Упражнения

10. а) Найдите некоторые три решения в натуральных числах уравнения $x^2 + (x+1)^2 = y^2$. б) Придумайте такие натуральные числа a, b, c, d, e, f, что для всякого решения x, y уравнения $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ верно равенство $(ax+by+c)^2 + (ax+by+c+1)^2 = (dx+ey+f)^2$.

11. Существует бесконечно много различных прямоугольных треугольников, каждый из которых обладает следующими свойствами: длины сторон – целые числа, длина гипотенузы – квадрат целого числа, а один из катетов на единицу короче гипотенузы. Докажите это.

Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$

При помощи многократно примененного перехода $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$ из решения (1; 0) получаются решения (3; 2), (17; 12), (99; 70), ... уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Например,

$$99 = 3\cdot 17 + 4\cdot 12,$$
$$70 = 2\cdot 17 + 3\cdot 12.$$

Таким образом, уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$, как и уравнение $x^2 - 2y^2 = -1$, имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Если бы мы уже доказали теорему 2, то могли бы утверждать, что эти уравнения не имеют никаких других решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «начального» решения $(x;y) = (1;0)$ или $(1;1)$ при помощи правила $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$. Но пока теорема 2 не доказана, торопиться с этим не стоит.

Упражнения

12. Существует ли такой многочлен второй степени f, что среди его значений $f(n)$, где n – натуральное число, имеется бесконечно много квадратов натуральных чисел, а сам многочлен f не представим в виде $f = g^2$ ни для какого многочлена g?

13. Рассмотрим последовательности $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 17$, $x_3 = 99$, ... и $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 12$, $y_3 = 70$, ..., заданные своими начальными членами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$. Существуют ли такие числа a и b, что для любого натурального n верны равенства $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ и $y_{n+1} = ay_n + by_{n-1}$?

Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$

Правило $(x;y) \to (3x+4y; 2x+3y)$ позволяет из одного решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 7$ получить другое решение. Так, из решения $(x;y) = (3;1)$ получаем $(3\cdot 3 + 4\cdot 1; 2\cdot 3 + 3\cdot 1) = (13; 9)$, из которого получаем $(3\cdot 13 + 4\cdot 9; 2\cdot 13 + 3\cdot 9) = (75; 53)$, из которого можно получить еще одно решение, и так далее.

Привычная ситуация, скажете вы? Решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ получались из «начального» решения $(1; 0)$ при помощи этого же правила $(x; y) \to (3x+4y; 2x+3y)$, так что ничего нового нет? Не торопитесь:

$$5^2 - 2\cdot 3^2 = 7 .$$

Решение $(5; 3)$ не входит в цепочку

$$(3; 1) \to (13; 9) \to (75; 53) \to \ldots ,$$

а порождает свою цепочку:

$$(5; 3) \to (3\cdot 5 + 4\cdot 3; 2\cdot 5 + 3\cdot 3) = \\ = (27; 19) \to (3\cdot 27 + 4\cdot 19; 2\cdot 27 + 3\cdot 19) = \\ = (157; 111) \to \ldots$$

Других цепочек нет. Точнее говоря, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений* (3; 1) *и* (5; 3) *при помощи правила $(x; y) \to (3x + 4y; 2x + 3y)$.*

Доказательство примерно такое же, как и доказательство теоремы 2. Поэтому мы отложим его на будущее, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Уравнение $x^2 - 3y^2 = \pm 1$

Пара $(x; y) = (1; 0)$ удовлетворяет любому уравнению $x^2 - dy^2 = 1$. Подбором легко найти решение $x = 2$, $y = 1$ уравнения

$$x^2 - 3y^2 = 1 .$$

Можно найти и решение $(x; y) = (7; 4)$, а затем и $(26; 15)$. Возможны и дальнейшие вычисления (особенно если есть калькулятор и готовность к продолжительному и не очень разумному труду). Они приводят к решению $(97; 56)$.

Здесь явно пора остановиться и подумать. Мы не нашли ни одного решения уравнения

$$x^2 - 3y^2 = -1 .$$

И не потому, что плохо искали, а потому, что их нет. В самом деле, рассмотрим остаток от деления на 3 левой части уравнения $x^2 - 3y^2 = -1$. Поскольку $3y^2$ делится на 3, искомый остаток совпадает с остатком от деления x^2 на 3. Число x можно представить одной из трех формул: $x = 3k$ (если x делится на 3), $x = 3k + 1$ (если x при делении на 3 дает остаток 1) или, наконец, $x = 3k + 2$ (если остаток равен 2). При этом $x^2 = 9k^2$, $9k^2 + 6k + 1$ или $9k^2 + 12k + 4$. Остаток от деления на 3 в первом случае равен 0, а в двух других случаях остаток равен 1.

Итак, левая часть уравнения $x^2 - 3y^2 = -1$ при делении на 3 дает остаток 0 или 1, а правая – остаток 2. Мы