называют *нормой* числа $a+b\sqrt{2}$. Очень многое из того, что мы расскажем об уравнениях Пелля, можно перенести на случай так называемого норменного уравнения в полях алгебраических чисел. Но мы слишком увлеклись. Порекомендовав заинтересованному читателю когда-нибудь изучить «Теорию чисел» З.И.Боревича и И.Р.Шафаревича, вернемся к нашим делам.

Упражнение 3. Пусть a, b – целые числа, d – натуральное число, не являющееся квадратом, $x+y\sqrt{d}=\frac{1}{a+b\sqrt{d}}$. Докажите, что числа x и y целые в том и только том случае, когда $a^2-db^2=\pm1$.

Сложив равенства

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{2}$$

и

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{2}$$

и поделив на 2, находим

$$x_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}.$$

А если не сложить, а вычесть, то получим

$$y_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}.$$

Это и есть не рекуррентные (когда каждую следующую пару получаем из предыдущей), а явные формулы решений уравнения $x^2-2y^2=\pm1$ в натуральных числах. Заметьте: натуральные x_n и y_n получаются из формул, в которые входит иррациональное число $\sqrt{2}$!

Не каждому читателю, по себе знаем, легко привыкнуть пользоваться иррациональными числами для решения уравнений в целых числах. Поэтому мы вернемся к таким рассмотрениям чуть позже, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Упражнения

4. а) Докажите равенства $x_{2n}=2x_n^2-(-1)^n$ и $y_{2n}=2x_ny_n$. б) Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, а z и t – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $z^2-dt^2=1$, то натуральные числа a_n и b_n, определенные формулой $a_n+b_n\sqrt{d}=\left(z+t\sqrt{d}\right)^n$, обладают тем свойством, что $a_{2n}=2a_n^2-1$ и $b_{2n}=2a_nb_n$. Докажите это.

5. а) Для любого натурального n число $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ представимо в виде $\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$, где k – натуральное число. Докажите это. б) (М1522) Для любых натуральных m, d, n существует такое натуральное k, что $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+d}\right)^n=$ $=\sqrt{k}+\sqrt{k+d^n}$. Докажите это. в) Пусть m и n – натуральные числа, $n>1$. Докажите, что для некоторого натурального числа k имеем $\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.

6. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d, что $\left(a+b\sqrt{2}\right)^2+\left(c+d\sqrt{2}\right)^2=7+5\sqrt{2}$?

7(М874)**.** Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что а) $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m\neq\left(3+5\sqrt{2}\right)^n$; б*) $\left(a+b\sqrt{d}\right)^m\neq\left(b+a\sqrt{d}\right)^n$, где a, b и d – натуральные числа, $a\neq b$ и число d не является точным квадратом.

8. Докажите следующие утверждения.

а) (М352) Число $\left[\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}\right]$ нечетно.

б) Первые 1000 цифр после запятой десятичной записи числа $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1979}$ – девятки.

в) Первые 999 цифр после запятой десятичной записи числа $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999}$ – нули.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}=1$.

д) Перед запятой в десятичной записи числа $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. *Указание.* Для любого целого неотрицательного n обозначьте $a_n=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n}$ и докажите равенство $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$.

(Пункт б) предлагали в соответствующем году самым сильным абитуриентам мехмата МГУ на устном экзамене. Пункт в) предлагали в 1965 году на конкурсе ВМШ при мехмате МГУ. Пункт г) предлагали на студенческой олимпиаде 1977 года.)

9* (М520)**.** Рассмотрим последовательность чисел $x_n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$. Каждое из них можно привести к виду $x_n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n – целые числа. Найдите пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}$.

Уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 обладает тем свойством, что один из его катетов на 1 длиннее другого. Много ли еще таких треугольников, точнее, много ли решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$? Чтобы ответить на этот вопрос, раскроем скобки и приведем подобные:

$$2x^2+2x+1=y^2.$$

Теперь, домножив обе части на 2, выделим полный квадрат:

$$(2x+1)^2+1=2y^2.$$

Обозначив $z=2x+1$, получим уравнение

$$z^2-2y^2=-1.$$

Любое удовлетворяющее последнему уравнению число z нечетно. Поэтому мы свели задачу к уравнению $z^2-2y^2=-1$, где y, z – натуральные числа, причем $z>1$.

Как мы помним, если $z^2-2y^2=-1$, то

$$(z+2y)^2-2(z+y)^2=1.$$

В правой части теперь находится 1, а не −1. Мы умеем переходить от 1 к −1: для любого решения $(a;\ b)$ уравнения $a^2-2b^2=1$ выполнено равенство

$$(a+2b)^2-2(a+b)^2=-1.$$

Следовательно, из любой пары натуральных чисел $(z;\ y)$, удовлетворяющей равенству $z^2-2y^2=-1$, мы