О простом и сложном

Е.СОКОЛОВ

Однажды занятие нашего физического кружка началось не совсем обычно. Ребята сидели хмурые и невеселые.

– Что случилось? – поинтересовался я.

– Нам испортили настроение. И вообще, эти задачи на расчет сопротивлений уже изжили себя!

– Интересно, еще недавно вы с энтузиазмом их решали.

– Все имеет свой предел! На олимпиаде нам предложили хорошо известную задачу: найти сопротивление каркаса куба между различными его вершинами. Правда, добавили к ребрам еще и диагонали – все, кроме главных (рис. 1).

Предлагаемая вашему вниманию статья посвящена способу расчета сложных сопротивлений, который автор назвал «методом старого узла». Предвидим возможное недоумение – зачем? И так есть много различных методов и приемов, которые повторяются из пособия в пособие...

Конечно же, мы решили опубликовать эту статью не для того, чтобы «на всякий случай» вооружить читателя еще одним методом расчета. (Думаем, что с обсуждаемыми в статье задачами он легко справится и обычными способами, например методом «склейки узлов».) Нам понравилось другое – то, как именно автор рассказывает об этом методе. Изложение превратилось у него в небольшое увлекательное научное исследование, где он учит читателя удивляться и ставить вопросы, выдвигать гипотезы и проверять их расчетами. Кроме того, сам взгляд на проблему, утверждение о том, что «почти полные системы» так же просты, как и «почти пустые», очень близко современному физическому мышлению.

Нам было интересно читать статью – желаем вам того же. (Прим. ред.)

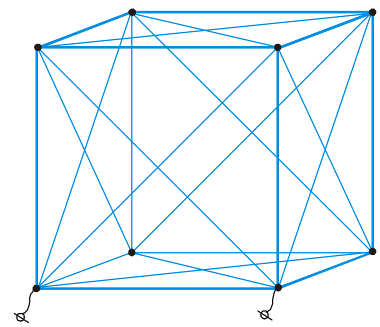


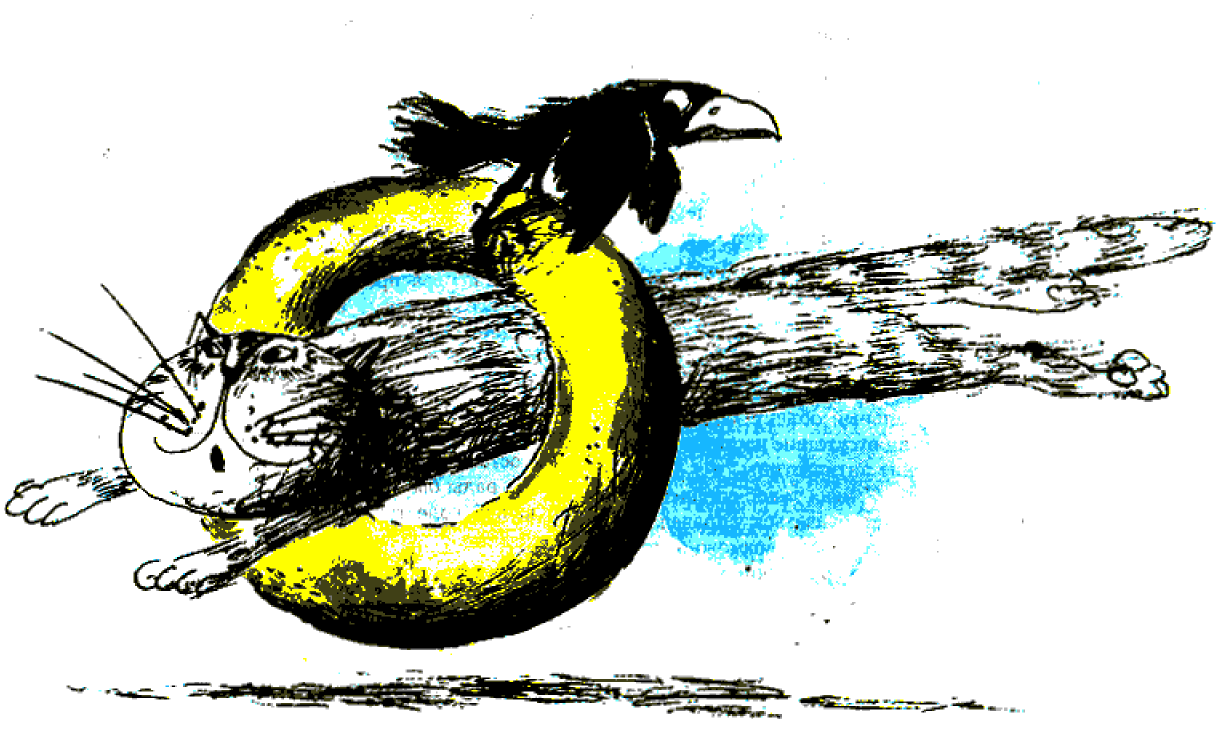
Рис.1. Задача, испортившая кружковцам настроение

– А все сопротивления одинаковы?

– Одинаковы. Представляете, ни одной новой идеи, но чтобы решить эту задачу, пришлось исписать шесть листов бумаги! А если добавят еще и главные диагонали, то олимпиада превратится в соревнование расчетчиков!

– Ну что же, по-моему, у нас есть прекрасная тема для сегодняшнего занятия: «Все имеет свой предел. В том числе и сложность». И не удивляйтесь! На мой взгляд, очень часто оказывается справедливым принцип, который можно назвать принципом простоты: просты либо почти полностью незаполненные системы, либо почти полностью заполненные. Поэтому, заполняя систему, пытаясь усложнить ее, мы можем в конце концов получить очень простую систему. Вполне возможно, что это имеет место и в вашем случае.

– ...?



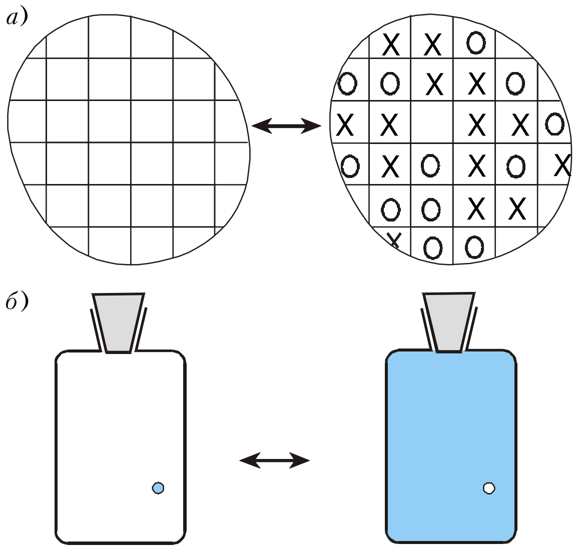


Рис.2. Два предельных случая простоты

– Вот пример. Очень легко сделать первый ход при игре «крестики-нолики» на бесконечной доске (рис. 2,*а*), когда поле совсем не заполнено. Но так же нет никаких проблем с ходом и тогда, когда заполнены все клетки, кроме одной.

– Это понятно. А в жизни такое бывает?

– Ну что же, вот пример из жизни (рис.2,*б*). Легко описать движение воды в сосуде, когда ее там лишь одна капля. Но так же легко рассмотреть случай, когда сосуд почти полностью заполнен и в нем есть лишь только один пузырек. Обратите внимание, как изменяется при этом наш язык. Мы уже не говорим о воде, мы говорим о новом объекте «отсутствие воды» и называем его пузырьком. И даже приписываем ему совершенно новые свойства. Например, если сосуд перевернуть, куда начнет двигаться пузырек?

– Вверх.

– Так, как если бы его масса была отрицательна. Видите, мы не только придумали новый объект, но даже наделили его новыми свойствами. И все это для того, чтобы не обсуждать сложное движение всей воды, а рассмотреть лишь движение «отсутствующей воды». И это проще – ведь пузырек-то один.

– А в науке? Неужели и там рассматривают то, чего нет?

– Да, при исследовании почти заполненных систем рассмотрение того, чего нет, это общий подход. Так, в физике полупроводников отсутствие электрона рассматривают как вполне реальный объект «дырка», в физике элементарных частиц отсутствие частицы можно трактовать как появление античастицы, и т.д. Но вернемся к нашему вопросу. У меня такое ощущение, что принцип простоты может оказаться справедливым и в этом случае. Так что вполне возможно, что ваши опасения напрасны, и в расчетчиков мы не превратимся.

Выбираем метод

– Если мы решили рассмотреть такую глобальную проблему, как справедливость принципа простоты, то неплохо было бы вооружиться и соответствующим общим методом расчета сопротивлений электрических схем. Какой бы метод нам применить?

– Метод объединения точек с постоянными потенциалами!

– Метод исключения сопротивлений, включенных между симметричными точками!

– Правила Кирхгофа – ими уж точно можно рассчитать все, что хочешь!

– Из предложенных вами методов универсален лишь метод Кирхгофа. Да и он имеет недостаток – выбирать контуры обхода надо для каждой схемы свои. Давайте лучше изберем для исследования метод старого узла.

– А что это за метод? Мы о нем не слышали.

– Если так, то послушайте рассказ о старом узле.

Рассказ о старом узле

Однажды в одной электрической цепи один старый-престарый узел, давайте назовем его n-м узлом (рис. 3,*а*), решил уйти на покой.

– Братья-узлы, стар я стал, тяжело мне коммутировать и перераспределять токи, отпустите меня подобру-поздорову!

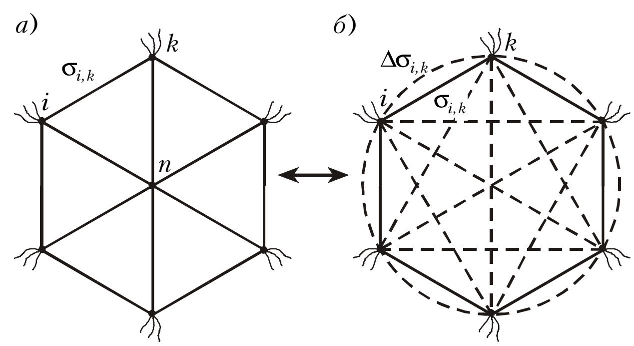


Рис.3. Исключение из схемы n-го узла

– Да как же так, где же такое видано?! – возмутился i-й узел. Да только от меня одного к тебе идет ток $I_{i,n}$, а от других узлов и того больше! Уйдешь ты, изменится в цепи распределение токов, общее сопротивление цепи другим станет.

– А вы перераспределите их, токи эти, между собой! Пусть все те узлы, которые соединяются со мной проводниками с проводимостью [1] $\sigma_{i,n}$, соединятся между собой дополнительными проводниками с проводимостями $\Delta\sigma_{i,k}$ (рис.3,*б*) так, чтобы вытекающий из каждого узла ко мне ток в точности распределился между другими. Тогда и общее сопротивление неизменным останется.

– Да рады бы мы, дедушка, – сказал k-й узел, да не по нашей воле текут токи. А пропорциональны они

1 Проводимость – величина, обратная сопротивлению. Если узлы соединяются проводником с сопротивлением $R_{i,k}$, то можно сказать, что между ними включен проводник с проводимостью $\sigma_{i,k} = 1/R_{i,k}$.

разности потенциалов между нами. Удастся ли нам перераспределить их так, как ты хочешь?

– А вы проводимости дополнительные выбирайте по правилу

$$\Delta\sigma_{i,k} = \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \sigma_{2,n} + \ldots + \sigma_{n-1,\,n}},$$

авось и получится.

Проверили узлы это правило. И вышло все, как и предсказывал старый узел – не изменилось общее сопротивление цепи. Отпустили они его на покой. И стали жить-поживать, как схема из $(n-1)$ узла с проводимостью между i-м и k-м узлами, пересчитанной по правилу

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \sigma_{2,n} + \ldots + \sigma_{n-1,\,n}}.$$

– Вот такая история. Ну, а что касается метода, то, надеюсь, вы поняли его смысл?

– Конечно, исключая узлы по очереди, мы в конце концов получим схему, состоящую из двух узлов. Проводимость между ними и будет общей проводимостью цепи. Только странно, что такой общий метод расчета нам неизвестен.

– Официальное название этого метода – метод узловых проводимостей. Если вы хотите познакомиться с его выводом из общих принципов, прочитайте Приложение. А неизвестен он вам потому, что для обычных школьных схем он не очень хорош. Такие схемы слабо заполнены, т.е. отношение числа проводников к числу узлов в них порядка единицы. Поэтому на начальном этапе при исключении узлов число новых сопротивлений катастрофически растет. При расчетах вручную это очень неудобно. А вот для полных или почти полных схем, в которых почти все узлы связаны между собой и которые мы собираемся рассмотреть, каждый шаг приносит упрощение.

– А я узнал этот метод. Это школьное правило о замене двух последовательно включенных сопротивлений на одно (рис.4,*а*). Смотрите, что получится, если исключить узел *3*:

$$\sigma'_{1,2} = \sigma_{1,2} + \frac{\sigma_{1,3}\sigma_{2,3}}{\sigma_{1,3} + \sigma_{2,3}} = \frac{(1/R_1)(1/R_2)}{(1/R_1) + (1/R_2)} = \frac{1}{R_1 + R_2},$$

или

$$R_{1,2} = R_1 + R_2.$$

– Очень полезное наблюдение. А для схемы 4,*б* новое правило совпадает с правилом электротехники о замене «звезды» на «треугольник»:

$$R_{1,2} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

и, аналогично, для $R_{2,3}$ и $R_{3,1}$.

Упражнение 1. Получите это правило с помощью метода старого узла. *Указание*: исключите узел *4*.

– Метод старого узла универсален и содержит в себе уже известные вам методы. Особое его преимущество – алгоритмичность. С его помощью легко составить программу, рассчитывающую сопротивление цепи по

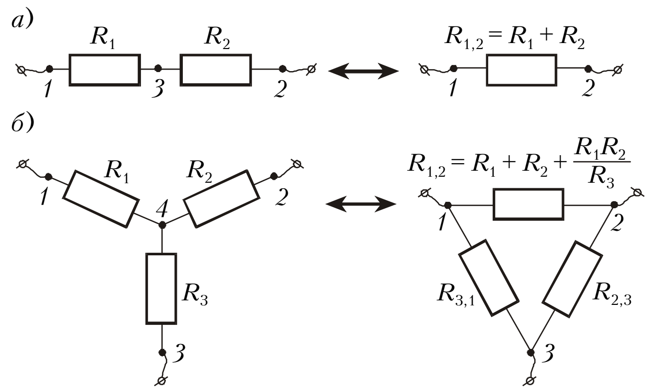


Рис.4. Частные случаи общего метода

заданной таблице проводимостей $\sigma_{i,k}$. Я думаю, неплохо было бы иметь такую программу в нашем кружке. Ведь если вы и дальше собираетесь расписывать по шесть листов для решения задачи, то знание конечного ответа могло бы очень пригодиться в вашем нелегком труде. Итак, метод выбран, осталось применить его.

Вакуум

– Давайте начнем с самого сложного случая – с полной цепи. Будем называть полной цепью цепь, в которой каждый узел связан с другими узлами (рис. 5,*а*). Только давайте для начала считать все проводни-

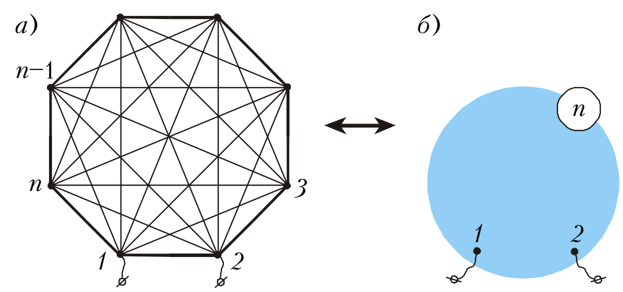


Рис.5. Новое изображение полной цепи

ки одинаковыми с проводимостями σ_0. В конце концов, и в обычных задачах сопротивления подбираются специальным образом, чтобы сработал какой-нибудь метод.

И второе, если уж мы собираемся взглянуть на эти задачи по-новому, то давайте и рисунки рисовать не по правилам. Скажем, проводники с проводимостью σ_0 вообще обозначать не будем, а если вдруг мы введем в цепь проводники других номиналов, то обозначим их цветными линиями. К примеру, те, которых нет, – черной линией. Смотрите (рис.5,*б*), во что превратится тогда стандартное изображение полной цепи.

– Так ведь это пустота!

– Согласен. Только давайте вместо слова «пустота» употреблять слово «вакуум». Ведь у нас не то чтобы совсем ничего нет, просто нет никакого отличия одного элемента от другого. Число узлов n будем называть порядком вакуума, а проводимость участков между узлами – вакуумной проводимостью.

Давайте рассчитаем проводимость вакуума n-го по-

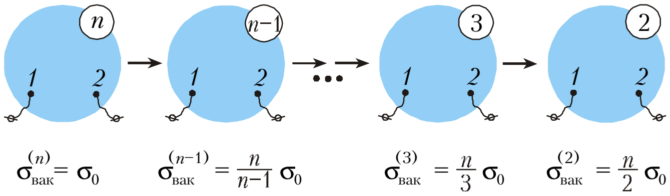


Рис.6. Вакуум порождает вакуум

рядка. Применим наш метод и начнем удалять одну вершину за другой (рис.6).

После удаления n-го узла к каждой проводимости между узлами прибавится одно и то же слагаемое

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}} = \frac{\sigma_0}{n-1},$$

и все они станут равными

$$\sigma_{\text{вак}}^{(n-1)} = \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{n-1} = \frac{n}{n-1}\sigma_0.$$

– Смотрите, у нас снова получился вакуум!

– Да, вакуум порождает вакуум, только более низкого порядка $(n-1)$ и с более высокой вакуумной проводимостью.

– А я даже закон сохранения открыл: произведение порядка вакуума на вакуумную проводимость есть величина постоянная и равная $n\sigma_0$.

– Правильно. Поздравляю с первым законом. Он позволяет сразу же получить ответ для общего сопротивления вакуума порядка n.

Когда у нас останется только два узла, а сопротивление между ними и будет искомым, мы из закона сохранения получим

$$2\sigma_{\text{вак}}^{(2)} = n\sigma_0,$$

откуда

$$\sigma_{\text{вак}} = \frac{n\sigma_0}{2}.$$

Итак, для вакуума ответ у нас уже есть. Надеюсь, вы узнали в вакууме электрическую цепь, о которой мы уже упоминали сегодня?

– Кажется, да. Каркас куба со всеми диагоналями, в том числе и главными, это вакуум восьмого порядка. Ведь в этой цепи восемь узлов, и каждый узел связан с другими. Выходит, это совсем несложная задача. И ответ для нее у нас уже готов. Сопротивление каркаса куба, в котором есть все боковые ребра и диагонали, между двумя любыми вершинами одинаково и равно

$$R_{\text{пол}} = \frac{R}{4}.$$

Мир частиц

– Пора заселить наш вакуум различными существами. Давайте начнем с частиц. Вакуумом с частицами мы будем называть такие схемы, в которых некоторые внутренние узлы соединяются проводниками с отлич-

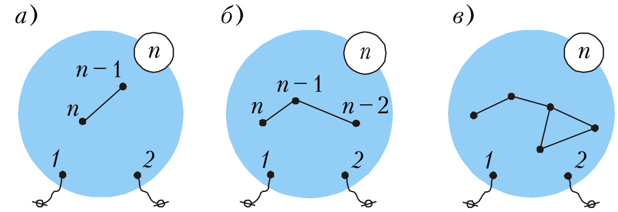


Рис.7. Вакуум с частицами

ной от σ_0 проводимостью. На рисунке 7 изображены некоторые представители этого класса.

– Можно сказать, что это элементарные частицы, парящие в безвоздушном пространстве?

– Конечно, можно. Можно даже сказать, что это живые организмы, плавающие в полном пруду, который мы назвали вакуумом.

Давайте вначале выберем для расчета самую простую частицу (см. рис.7, *а*) – между двумя узлами нет связи. Смотрите, что получится через два шага, после удаления n-го и $(n-1)$-го узлов (рис.8). После удаления n-го узла проводимости всех проводников, кроме выхо-

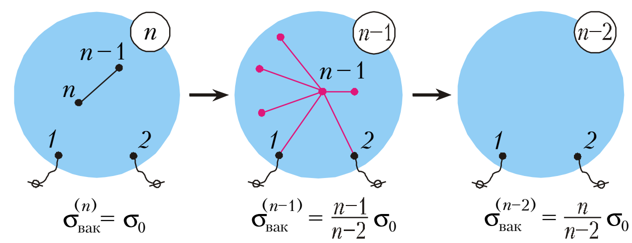


Рис.8. Частица – звезда – ничто

дящих из $(n-1)$-го узла, изменятся на величину

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{n-2}$$

и станут равными

$$\sigma_{\text{вак}}^{(n-1)} = \frac{n-1}{n-2}\sigma_0.$$

А после удаления $(n-1)$-го узла ко всем проводимостям добавится еще раз величина

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_0}{n-2},$$

и все они окажутся равными

$$\sigma_{\text{вак}}^{(n-2)} = \frac{n}{n-2}\sigma_0.$$

– Какая интересная судьба: частица превращается в прекрасную звезду, а затем бесследно исчезает! Но ведь это означает, что простейшие частицы не меняют сопротивления вакуума. После исключения двух вершин у нас получился вакуум $(n-2)$-го порядка с вакуумной проводимостью такой же, какая получается после двух шагов из чистого вакуума.

– Совершенно верно. Никакая частица не может изменить сопротивления вакуума, оно остается равным

$$\sigma_{\text{вак}} = \frac{n}{2}\sigma_0.$$

Упражнение 2. Покажите, что и более сложные частицы (см. рис.7,*б* и *в*) не приводят к изменению сопротивления вакуума.

Итак, полезный вывод: наличие частиц мы можем игнорировать!

Мир растений

– Все нетривиальные схемы – это схемы, у которых каркас выделенных проводников содержит точки входа и выхода. Давайте такие каркасы называть растениями. Этот мир очень богат и сложен и содержит все виды электрических цепей. Например, самый общий случай – полная цепь с различными проводимостями между узлами – есть по нашей терминологии разросшееся разноцветное дерево.

– Да, оказывается прикосновение к входу и выходу чревато не только на практике, но и в теории.

– Совершенно верно. Но наша цель – не анализ всех возможных случаев, а проверка принципа простоты. Частично мы в нем уже убедились – полные схемы не представляют труда для расчета. Давайте теперь рассмотрим почти полную цепь и убедимся, что расчет вполне остается нам по силам.

На рисунке 9 изображены три простейших растения: перемычка, элементарное растение и два элементарных растения. Найдем сопротивления этих цепей. Если

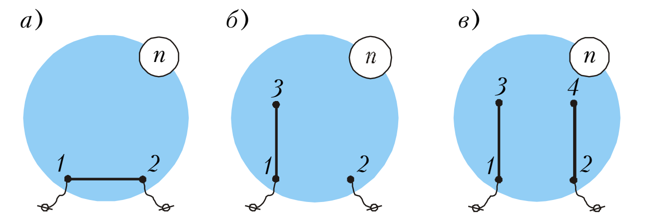


Рис.9. Три схемы растений: перемычка, элементарное растение, два элементарных растения

в предыдущем разделе мы удаляли особенные узлы, то теперь давайте попробуем другой прием – удаление вакуумных (регулярных) узлов. Вот что получается.

В случае перемычки можно удалить все узлы, кроме входа и выхода. На рисунке 10,*а* показано, что останется после такого удаления. Пунктирная линия соответствует вакуумной проводимости n-мерного вакуума

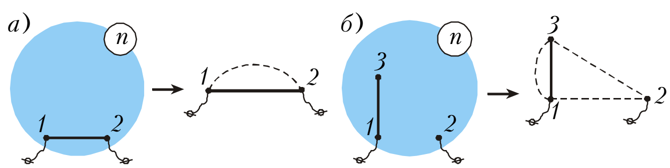


Рис.10. После удаления регулярных узлов получаются простейшие схемы

после удаления $(n-2)$узлов, толстая жирная линия напоминает, что из этой проводимости следует вычесть σ_0, которую мы «забыли» включить в исходной схеме между узлами *1* и *2*. Поэтому для перемычки получим

$$\sigma_{\text{пер}} = \frac{n}{2}\sigma_0 - \sigma_0 = \frac{n-2}{2}\sigma_0 .$$

В случае элементарного растения после удаления вакуума останутся три узла (рис.10,*б*). Пунктирная линия обозначает проводимость n-мерного вакуума с исключенными $(n-3)$ узлами, жирная – отрицательную проводимость $-\sigma_0$. Так что исключение всех регулярных узлов приводит нас к схеме с тремя узлами и проводимостями между ними, равными

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,3} = \frac{n}{3}\sigma_0$$

и

$$\sigma_{1,3} = \frac{n}{3}\sigma_0 - \sigma_0 = \frac{n-3}{3}\sigma_0 .$$

Поэтому после удаления третьего узла для проводимости элементарного дерева получим

$$\sigma_{\text{эл}} = \frac{n}{3}\sigma_0 + \frac{\frac{n-3}{3}\sigma_0 \cdot \frac{n}{3}\sigma_0}{\frac{n-3}{3}\sigma_0 + \frac{n}{3}\sigma_0} = n\frac{n-2}{2n-3}\sigma_0 .$$

А в случае двух элементарных растений попробуйте произвести расчет сами и убедитесь в том, что проводимость этой схемы равна

$$\sigma_3 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sigma_0 .$$

Окончательный ответ

– Пожалуй, теперь нам по силам решить изначальную задачу не только для трехмерного куба, но и для N-мерного.

– А мы N-мерный куб не видели!

– А его никто не видел. Обычно объектам присваивается статус N-мерного для особого шика, если просматривается какая-то аналогия с реальными трехмерными или двумерными объектами. Например, каркас обычного куба – это электрическая схема с 2^3 узлами. Поэтому электрическую схему с 2^N узлами мы можем с полным правом назвать N-мерным кубом.

Обобщаем дальше. Номера восьми вершин трехмерного куба в двоичной системе счисления можно записать так: $0-(0,0,0)$, $1-(0,0,1)$, … , $7-(1,1,1)$. Тогда, если у нас есть цепь с 2^N узлами, мы можем каждому из них поставить в соответствие двоичный N-разрядный номер: $0-(0,0,\ldots,0)$, . . . , $(2^N-1)-(1,1,\ldots,1)$. По аналогии с трехмерным единичным кубом, эти наборы из N нулей и единиц можно назвать координатами вершин единичного N-мерного куба. Отрезок, соединяющий i-ю и k-ю вершины, будем называть ребром, если его «длина», вычисленная по теореме Пифагора через «N-мерные координаты»:

$$l = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + \ldots + (z_i - z_k)^2} ,$$

равна единице. А если эта величина для каких-то двух вершин будет иметь максимально возможное значение $\sqrt{N}$, то мы будем говорить, что эти вершины лежат на главной диагонали.

– Тогда ясно, что каждая вершина N-мерного куба соединяется главной диагональю только с одной вершиной! Например, (0,0,…,0) с (1,1,…,1), (0,0,…,1) с (1,1,…,0), и т.д.

– Совершенно верно. Теперь сформулируем общую задачу: если в N-мерном кубе все вершины соединены между собой ребрами и диагоналями (за исключением главных), то каково сопротивление такого каркаса между различными вершинами?

На рисунке 11,*а* изображен N-мерный куб с исключенными главными диагоналями. В зависимости от

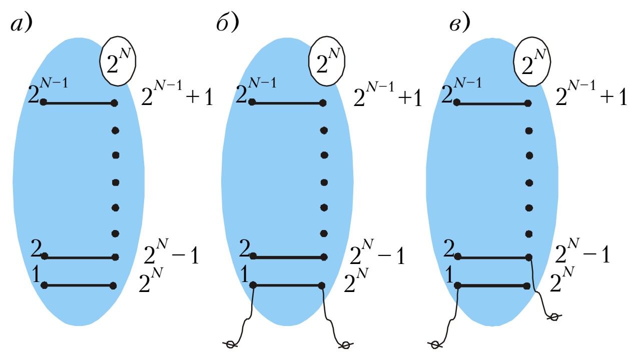


Рис.11. Всего-навсего N-мерный куб без главных диагоналей

того, как мы подключим вход и выход, у нас может получиться либо вакуум с частицами и перемычкой (рис.11,*б*), где вход и выход лежат на главной диагонали, либо вакуум с частицами и двумя элементарными растениями (рис.11,*в*). Для каждого случая ответ нам уже известен:

$$\sigma_1 = \frac{n-2}{2}\sigma_0 = \left(2^{N-1}-1\right)\sigma_0$$

и

$$\sigma_2 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sigma_0 = \frac{2^N\left(2^{N-1}-1\right)}{2^N-1}\sigma_0 .$$

Для предложенной вам на олимпиаде задачи про трехмерный кубик эти ответы переходят в следующие: сопротивление между вершинами, лежащими на главной диагонали, равно $\frac{R}{3}$; между любыми другими вершинами – $\frac{7}{24}R$.

Итак, наше исследование закончено. Вполне возможно, что проницательный читатель давно заметил, что многие из рассмотренных выше задач можно было бы решить обычными школьными методами. Но будем надеяться, что и метод старого узла найдет свое место в вашем арсенале.

Приложение

Правило старого узла нам будет удобно получить, исходя из принципа минимума для электрических схем, который можно сформулировать следующим образом: при заданном напряжении на входе и выходе потенциалы в узлах цепи принимают такие значения, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, была минимальной.

Теперь представим этот принцип в виде математического утверждения. Пусть потенциалы i-го и k-го узлов равны φ_i и φ_k (если к входу и выходу цепи приложено заданное внешнее напряжение U, то $\varphi_1 = U$, $\varphi_2 = 0$). Тогда сила тока, текущего по соединяющему их проводнику, согласно закону Ома, равна

$$I_{i,k} = \sigma_{i,k}\left(\varphi_i - \varphi_k\right),$$

а выделяющаяся в нем тепловая мощность –

$$P_{i,k} = \sigma_{i,k}\left(\varphi_i - \varphi_k\right)^2 .$$

Полная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, равна

$$P\left(\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\sigma_{i,k}\left(\varphi_i - \varphi_k\right)^2 . \qquad (1)$$

(Множитель 1/2 введен в этой формуле для удобства записи области суммирования.)

Итак, согласно нашему принципу, потенциалы φ_i внутренних узлов должны быть такими, чтобы величина тепловыделения была минимальной. Это условие позволяет определить потенциал n-го узла φ_n через потенциалы всех остальных узлов. Выделяя в выражении для тепловой мощности слагаемые, содержащие φ_n, получим

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\left(\varphi_i - \varphi_k\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\left(\varphi_n - \varphi_i\right)^2 . \qquad (2)$$

Вклад потенциала φ_n квадратичный:

$$\varphi_n^2\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,n} - 2\varphi_n\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\varphi_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\varphi_i^2 .$$

Значение φ_n, минимизирующее этот вклад, равно

$$\varphi_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\varphi_k}{\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}} .$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим, что оставшиеся потенциалы должны минимизировать выражение

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\left(\varphi_i - \varphi_k\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\varphi_k \Big/ \sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n} - \varphi_i\right)^2 .$$

Если немного повозиться с этим выражением, то его можно представить в виде

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\left(\sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}}\right)\left(\varphi_i - \varphi_k\right)^2 .$$

Сравним с выражением (1). Получается, что тепловая мощность, выделяющаяся в исходной цепи, равна тепловой мощности в цепи, состоящей из $(n-1)$ узла, которые связаны между собой проводниками с проводимостями

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}} .$$

Но если и мощности, и приложенные напряжения в обоих случаях одинаковы, то и сопротивления обеих схем равны.

Это и есть правило старого узла, позволяющее заменить исходную схему схемой с меньшим количеством узлов.