Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1811» или «Ф1818». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1811–М1815, Ф1818–Ф1822

М1811. Два джентльмена одновременно начинают прогулку из пунктов A и B, чтобы завершить ее, соответственно, в пунктах B и A (рис.1). В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между A и B 1000 м, через каждые 100 м от аллеи AB отходит боковая аллея длиной 100 м. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти по ней туда—обратно либо ее проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.

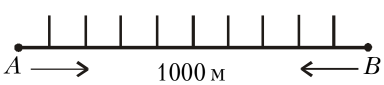

Рис.1

В.Произволов

М1812. Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$\text{НОД}\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right)=1.$$

Докажите, что

$$\text{НОД}(ab+c, bc+a, ca+b)=\text{НОД}(a, b, c).$$

(НОД – наибольший общий делитель.)

А.Голованов

М1813. Фигура F ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса (рис.2).

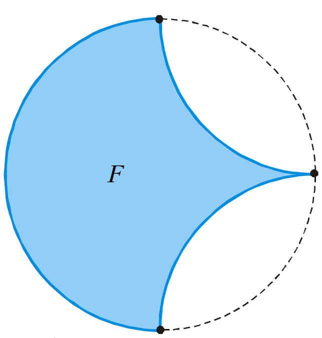

Рис.2

а) Разрежьте F на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте F на четыре части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трех других можно было сложить второй такой же квадрат.

В.Произволов

М1814. Пусть a, m_1, m_2 – натуральные числа, причем a взаимно просто как с m_1, так и с m_2. Обозначим через r_n остаток от деления целой части числа a^n/m_1 на m_2 ($n=0, 1, 2, \ldots$). Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ является периодической.

Н.Осипов

М1815. Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

А.Заславский

Ф1818. На плоскости нарисован большой квадрат $АБВГ$ со стороной d. За какое минимальное время точка может проехать по пути $АБВГА$, если ее максимальное ускорение по величине не может превышать a?

З.Рафаилов

Ф1819. Тело массой M = 10 кг подвешено в лифте при помощи трех одинаковых легких веревок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие – к полу. Веревки натянуты так, что в покое натяжение каждой из нижних веревок составляет F_0 = = 5 Н. Найдите силу натяжения верхней веревки при ускорении лифта, равном $a_1 = 1$ м/с^2 и направленном вверх. То же – при величине ускорения лифта $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным g = 9,8 м/с^2.

А.Веревкин

Ф1820. Толстостенная капиллярная трубка из стекла с внутренним диаметром 0,5 мм, внешним диаметром

5 мм и длиной 6 см наполовину погружена в вертикальном положении в большой сосуд с водой. С какой силой нужно удерживать трубку, чтобы она не утонула? Плотность стекла вдвое больше плотности воды. Считать, что стекло полностью смачивается водой, коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м.

Р.Александров

Ф1821. Плоский конденсатор емкостью C с воздушным диэлектриком состоит из двух больших пластин, расположенных очень близко друг к другу. Одна из пластин не заряжена, другая несет заряд Q. Соединим пластины проводником, имеющим большое сопротивление R. Оцените количество теплоты, которое выделится в проводнике за большое время.

А.Повторов

Ф1822. К источнику переменного напряжения подключили последовательно амперметр и два «черных ящика», в каждом из которых может находиться резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Переключили «ящики» из последовательного соединения в параллельное – показание амперметра осталось прежним. Начнем теперь изменять частоту источника – показания амперметра при этом будут вначале уменьшаться, а потом увеличиваться. Во сколько раз нужно изменить частоту, чтобы показания амперметра вернулись к первоначальному значению? Элементы внутри ящиков считайте идеальными.

А.Зильберман

Решения задач М1786–М1795, Ф1803–Ф1807

М1786. *На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.*

Сначала сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма Рамсея. *Среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно незнакомых*.

Вот ее несложное доказательство. Пусть A – один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо – трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A. Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых. Если же все трое незнакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A.

Теперь решаем задачу. Все шесть точек соединим всевозможными отрезками. Соединяющий две точки отрезок покрасим красным, если он является наименьшей стороной некоторого треугольника, и синим в противном случае. Так как синий треугольник невозможен, то существует, в силу леммы Рамсея, красный; возьмем его наибольшую сторону. Она и будет наибольшей в одном и наименьшей в другом треугольниках.

С.Рукшин

М1787*. *Пусть p и q – натуральные числа, большие 1. Известно, что $q^3 - 1$ делится на p, а $p - 1$ делится на q. Докажите, что $p = q^{3/2} + 1$ или $p = q^2 + q + 1$.*

Будем рассуждать так.

Имеем $q^3 - 1 = pk$ для некоторого $k \ge 1$. Так как $p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, то $k \equiv -1 (\operatorname{mod} q)$, т.е. $k = lq - 1$ для некоторого $l \ge 1$. Из равенства $p = (q^3 - 1)/(lq - 1)$ следует, что $l < q^2$, а также то, что числа $q^2 - l$ и $q - l^2$ делятся на $lq - 1$. Предположим теперь, что $p \ne q^{3/2} + 1$ (в частности, $l \ne q^{1/2}$). Если $1 < l < q$, $l \ne q^{1/2}$, то $0 < \left|q - l^2\right| < lq - 1$ и, следовательно, делимость $q - l^2$ на $lq - 1$ невозможна. Если же $q \le l < q^2$, то $0 < q^2 - l < lq - 1$ и невозможна делимость $q^2 - l$ на $lq - 1$. Таким образом, $l = 1$ и $p = q^2 + q + 1$. Этим все доказано.

Н.Осипов

М1788. *В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB (рис.1). Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P, AC и $A'C'$ – в точке M, BC и $B'C'$ – в точке N. Докажите, что прямые IP и MN перпендикулярны.*

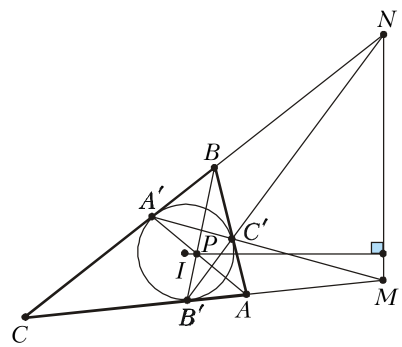

Рис.1

Построим на отрезках IA и IA' как на диаметрах окружности (рис.2). Отличная от I точка N' их пересечения будет основанием перпендикуляра, опущенного из I на AA', а прямая IN' проходит через N, так как IN' – общая хорда этих двух окружностей, BC – общая касательная первой из них и вписанной окружности треугольника, $B'C'$ – общая хорда второй и вписанной окружностей. Из подобия

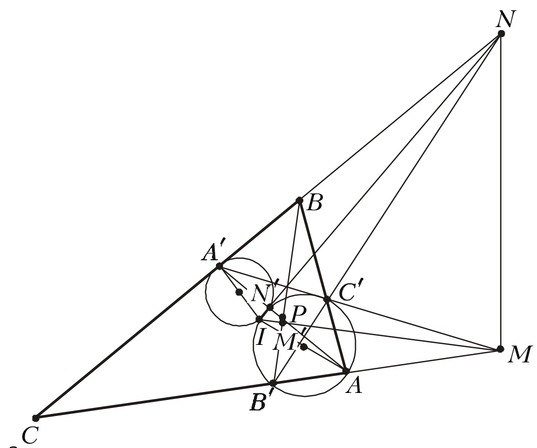

Рис.2