

# Бревно в шалаше

К.ОСИПЕНКО, А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

**В** ПРЕДЫДУЩЕМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА ТЕЧЕНИЕ этой статьи прервалось в том месте, где было выведено уравнение астроиды:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1.$$

Вот несколько упражнений.

## Упражнения

**9.** Найдите длину кратчайшего отрезка с концами на осях координат, проходящего через точку  $(a; b)$ , где  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

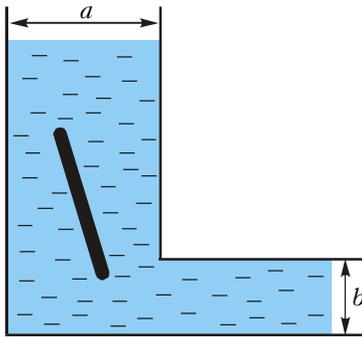


Рис.22

этого бревна длины  $d$  через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины  $d$ ?

**10.** Канал, берега которого – параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причем до поворота его ширина равна  $a$ , после поворота –  $b$  (рис.22). При каких  $d$  через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины  $d$ ?

**11.** Рассмотрим круг диаметра 1, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2. Нарисуем траекторию какой-то точки катящейся окружности (рис.23). Докажите, что получится астроида.

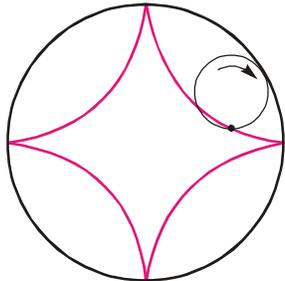


Рис.23

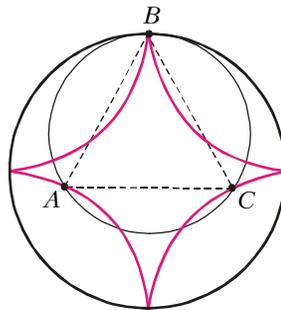


Рис.24

**12.** Рассмотрим равносторонний треугольник  $ABC$ , вписанный в круг диаметра 3, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2 (рис.24). Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  движутся по одной и той же кривой – астроиде.

## Нормали к эллипсу

Очень красива огибающая для семейства нормалей к эллипсу. Эллипс, как известно, можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Нормаль к эллипсу найти легко, если эллипс задать

параметрически:

$$(x; y) = (a \cos \varphi; b \sin \varphi).$$

(Это аналогично тому, как единичную окружность можно задать и уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ , и параметрически:  $(x; y) = (\cos \varphi; \sin \varphi)$ . Обдумайте это, если вы не встречались с этим раньше!)

Итак,  $x$  и  $y$  – функции параметра  $\varphi$ . Вычислим производные:  $(x'; y') = (-a \sin \varphi; b \cos \varphi)$ . Если отложить вектор с такими координатами от точки  $(x; y)$ , то получим вектор, касающийся эллипса. (Как всякий вектор скорости, сказал бы физик.)

Легко проверить, что если вектор  $(\alpha; \beta)$  отличен от нулевого вектора и перпендикулярен прямой  $l$ , проходящей через точку с координатами  $(m; n)$ , то прямую  $l$  можно задать уравнением  $\alpha x + \beta y = \alpha m + \beta n$ . (Докажите это!)

Поэтому уравнение нормали можно записать в виде

$$yb \cos \varphi - xa \sin \varphi = (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Теперь мы рассмотрим близкую к  $\varphi$  величину  $\psi$  (чтобы в конце концов перейти к пределу  $\psi \rightarrow \varphi$ ) и составим систему уравнений

$$\begin{cases} yb \cos \varphi - xa \sin \varphi = (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ yb \cos \psi - xa \sin \psi = (b^2 - a^2) \sin \psi \cos \psi. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на  $\sin \psi$ , второе – на  $\sin \varphi$  и вычтя первое уравнение из второго, получим

$$yb(\cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi) =$$

$$= (a^2 - b^2)(\sin \varphi \cos \varphi \sin \psi - \sin \psi \cos \psi \sin \varphi),$$

откуда

$$yb \sin(\varphi - \psi) = (a^2 - b^2) \sin \varphi \sin \psi (\cos \varphi - \cos \psi).$$

Чтобы удобнее было перейти к пределу, перепишем это равенство следующим образом:

$$y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi \sin \psi \frac{\cos \varphi - \cos \psi}{\varphi - \psi} \cdot \frac{\varphi - \psi}{\sin(\varphi - \psi)}.$$

Последний множитель стремится к 1 (это так называемый первый замечательный предел). Предпоследний множитель стремится к производной косинуса в точке  $\varphi$ . Значит, в пределе (при  $\psi \rightarrow \varphi$ ) получаем

$$y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^2 \varphi (-\sin \varphi),$$

т.е.  $y = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi$ . Аналогично,  $x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi$ .

(Проверьте это!)

Итак, мы нашли огибающую:

$$(x; y) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi; \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi \right).$$

Легко убедиться, что кривая, заданная этим параметрическим уравнением, может быть задана уравнением без параметра:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (b^2 - a^2)^{2/3}.$$

Эту кривую тоже называют астроидой.

**Упражнения**

**13.** Докажите, что прямая, заданная уравнением  $yb \cos \varphi - xa \sin \varphi = (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi$ , касается в точке

$\left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi; \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \varphi \right)$  кривой, заданной уравнением

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (b^2 - a^2)^{2/3}.$$

**14.** Если  $a^2 \neq b^2$ , то из точек астроиды

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (b^2 - a^2)^{2/3},$$

кроме вершин четырех ее «клювов», к эллипсу можно провести три перпендикуляра, из точек внешней области и из вершин «клювов» — два, а из точек внутренней области — четыре перпендикуляра. Докажите это.

**15.** Нарисуйте, как выглядит огибающая семейства нормалей к гиперболе, заданной уравнением  $xy = 1$ .

**16.** Огибающей для семейства нормалей к циклоиде — кривой, заданной параметрически формулами  $x = \pi t - r \sin t$  и  $y = r - r \cos t$ , где  $r > 0$ , — является циклоида, сдвинутая на  $2r$  вниз и на  $\pi r$  вправо. Докажите это.

**Вишенка в бокале**

Завершит подготовку к решению задачи о максиицилиндре задача, которую в 1994 году предложил Н.Б. Васильев одиннадцатиклассникам — участникам Московской математической олимпиады:

**Задача.** Вишенка имеет форму шара радиуса  $r$ . Внутренняя поверхность бокала получена вращением кривой  $z = x^4$  вокруг оси аппликат. Найдите наибольшее возможное  $r$ , при котором вишенка может лежать в бокале и касаться его поверхности в начале координат.

**Решение.** Рассмотрим плоскую задачу. Запишем уравнение окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $(0; r)$ :

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

т.е.  $x^2 - 2ry + y^2 = 0$ . Эта окружность и график  $y = x^4$  должны иметь лишь одну общую точку — начало координат. Подставим значение  $y$  в уравнение:

$$x^2 - 2rx^4 + x^8 = 0.$$

Значит,  $x = 0$  или

$$x^6 - 2rx^2 + 1 = 0.$$

Значению  $x = 0$  соответствует начало координат. Чтобы вишенка касалась дна бокала, последнее уравнение не должно иметь корней. (Разберитесь в этом самостоятельно!) Записав его в виде

$$r = \frac{x^6 + 1}{2x^2}$$

и построив график функции

$$y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2}$$

(рис.25), видим, что задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции. Дифференцируем:

$$\left( \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2} \right)' = 2x^3 - \frac{1}{x^3},$$

так что производная обращается в ноль в точках  $x = \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ ; наименьшее значение функции равно

$$\frac{\left( \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \right)^6 + 1}{2 \left( \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \right)^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Это и есть максимальный радиус вишенки.

Есть и другой способ решения задачи о вишенке. Для положительного числа  $r$  рассмотрим квадрат расстояния от точки  $(0; r)$  до точки  $(x; x^4)$  и продифференцируем полученную функцию:

$$f(x) = x^2 + (x^4 - r)^2,$$

$$f'(x) = 2x + 8x^3(x^4 - r).$$

Производная равна нулю, если  $x = 0$  или

$$4x^6 - 4rx^2 + 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$r = x^4 + \frac{1}{4x^2}.$$

Чтобы вишенка помещалась в бокал, должно быть выполнено неравенство

$$f(x) \geq r^2,$$

т.е.

$$x^2 + \left( x^4 - \left( x^4 + \frac{1}{4x^2} \right) \right)^2 \geq \left( x^4 + \frac{1}{4x^2} \right)^2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + \frac{1}{16x^4} \geq x^8 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16x^4},$$

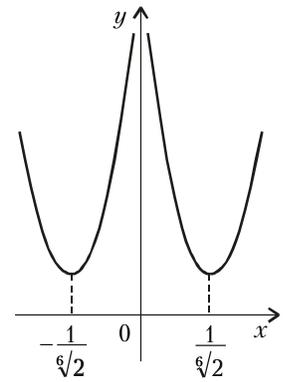


Рис.25

откуда

$$\frac{x^2}{2} \geq x^8.$$

Значит,  $|x| \leq \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$ . Дальнейшие рассуждения (при желании) читатель легко проведет самостоятельно. (Полезно рассмотреть график функции  $y = x^4 + \frac{1}{4x^2}$ , найти точку минимума  $x = 1/\sqrt{2}$  и понять, что значениям  $x \geq 1/\sqrt{2}$  соответствуют точки локального минимума, а значениям  $x < 1/\sqrt{2}$  – точки локального максимума функции  $f(x)$ .)

### Решение задачи о лежащем цилиндре

Тренировка закончена. Пора заняться давно обещанным делом – в данный конус (шалаш) радиуса  $R$  и высоты  $H$  вписать лежащий цилиндр (бревно) максимального объема. Поместим начало координат в центр основания конуса, а ось  $Oz$  направим в вершину конуса. Тогда для любой точки  $(x; y; z)$  боковой поверхности конуса имеем:

$$\frac{H}{R} = \frac{H - z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Обозначив  $k = H/R$ , получаем

$$k^2(x^2 + y^2) = (H - z)^2.$$

Несложно записать и уравнение окружности радиуса  $r$  с центром  $(x; 0; r)$ , которая ограничивает основание «лежащего» цилиндра:

$$y^2 + (z - r)^2 = r^2,$$

т.е.  $y^2 = 2rz - z^2$ . Значит, координаты точки пересечения этой окружности с боковой поверхностью конуса удовлетворяют уравнению

$$k^2(x^2 + 2rz - z^2) = (H - z)^2.$$

Как помните, есть два случая: при достаточно больших  $x$  величина  $r$  маленькая и окружность касается боковой поверхности конуса в точке  $(x; 0; k(R - x))$ , а при маленьких  $x$  касание происходит не в одной точке, а в двух. Рассмотрим эти случаи по очереди.

В первом случае  $2r = k(R - x)$  и

$$V = \pi \cdot 2x \cdot \left(\frac{k(R - x)}{2}\right)^2 = \pi k^2 x (R - x)^2 / 2.$$

Производную функции  $f(x) = x(R - x)^2$  мы уже вычисляли. И нулю ее уже приравнивали. Поэтому мы знаем, что функция  $f$  на интервале  $(0; R)$  имеет максимум в точке  $R/3$ . Если при  $x = R/3$  окружность касается боковой поверхности конуса в одной точке, то среди всех лежащих цилиндров максимальный объем имеет тот, высота которого равна  $2x = 2R/3$ , радиус основания равен  $r = H/3$ , а объем равен

$$V = 2\pi H^2 R / 27.$$

Обратите особое внимание на слова «среди всех лежащих цилиндров». Не среди «всех цилиндров первого случая», а среди всех! Дело в том, что и в первом, и во втором случае  $r \leq k(R - x)/2$  и поэтому  $V \leq \pi k^2 x (R - x)^2 / 2$ . (Обдумайте это!)

А если при  $x = R/3$  окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, то мы вынуждены разбирать второй случай. Уравнение

$$k^2(x^2 + 2rz - z^2) = (H - z)^2$$

можно записать в виде

$$z^2(1 + k^2) - 2(H + rk^2)z + (H^2 - k^2x^2) = 0.$$

Окружность касается боковой поверхности, когда это квадратное уравнение имеет кратный корень, т.е. когда его дискриминант  $D$  равен нулю. (Подумайте, почему!) Итак,

$$\frac{D}{4} = (kR + k^2r)^2 - (1 + k^2)(k^2R^2 - k^2x^2) = 0,$$

откуда

$$(R + kr)^2 = (1 + k^2)(R^2 - x^2)$$

и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{(1 + k^2)(R^2 - x^2)} - R}{k}.$$

Если дискриминант уравнения равен нулю, то найти его корень легко:  $z = (H + rk^2)/(1 + k^2)$ . Разумеется, должно быть выполнено неравенство  $0 \leq y^2 = 2rz - z^2$ , т.е.  $z \leq 2r$ . Подставив в это неравенство только что найденные значения  $z$  и  $r$  и поупражнявшись в алгебраических преобразованиях, получим в конце концов

$$x \leq \frac{k^2 R}{2 + k^2}.$$

Обозначив для краткости  $d = k^2 R / (2 + k^2)$ , мы видим, что при  $x \in [d, R)$  окружность касается боковой поверхности конуса одной точкой, а при  $x \in (0; d)$  – двумя. Неравенство

$$d \leq \frac{R}{3}$$

выполнено, как легко проверить, при  $k \leq 1$ . Поэтому мы уже нашли ответ ( $V = 2\pi H^2 R / 27$ ) при  $k \leq 1$  (т.е. при  $H \leq R$ ).

Осталось разобрать случай  $k > 1$ . Когда окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, объем цилиндра равен

$$V = 2\pi x \left( \frac{\sqrt{(1 + k^2)(R^2 - x^2)} - R}{k} \right)^2.$$

Продифференцируем функцию

$$f(x) = x \left( \sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R \right)^2$$

и приравняем производную к нулю:

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R \right)^2 - \\ & - 2 \frac{x^2(1+k^2)}{\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)}} \left( \sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} - R \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (1+k^2)(R^2-x^2) - R\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)} &= 2x^2(1+k^2), \\ (1+k^2)(R^2-3x^2) &= R\sqrt{(1+k^2)(R^2-x^2)}, \quad (*) \end{aligned}$$

$$(1+k^2)(R^2-3x^2)^2 = R^2(R^2-x^2),$$

$$9(k^2+1)x^4 - (6k^2R^2+5R^2)x^2 + k^2R^4 = 0,$$

$$x^2 = R^2 \frac{6k^2+5 \pm \sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)}.$$

Если в последней формуле взять знак плюс, то вследствие неравенства  $\frac{6k^2+5+\sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)} > \frac{1}{3}$  получаем, что в правой части формулы (\*) стоит отрицательное число, а в левой – положительное. Значит, надо брать знак минус.

Как выглядит график функции  $V(x)$ ? Поскольку функция  $r(x)$  дифференцируема во всех точках интервала  $(0; R)$ , в том числе в точке  $x = d$ , то функция  $V(x)$  тоже всюду дифференцируема на интервале  $(0; R)$ . Легко понять, что функция не может иметь график вроде изображенного на рисунке 26, а имеет единственную точку максимума (рис.27). (Впрочем, можно обойтись и без апелляции к рисункам 26 и 27

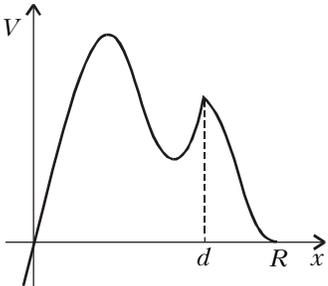


Рис.26

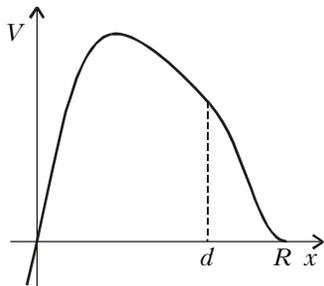


Рис.27

и дифференцируемости функции  $V(x)$ . А именно, при  $k > 1$  имеем  $\frac{R}{3} < d$  и, как можно доказать,

$$R \sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)}} < d. \text{ Поэтому функция } V(x)$$

на  $(0; d)$  имеет единственную точку максимума, а на  $[d; R)$  монотонно убывает.)

Таким образом, при  $k \geq 1$  максимум объема достигается при

$$x = R \sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18(k^2+1)}}.$$

Теперь легко выписать ответ. При  $H \leq R$  максимальный объем лежащего цилиндра равен  $\frac{2}{27} \pi R H^2$ , а при  $R \leq H$  максимальный объем  $V$  равен

$$\frac{\pi \sqrt{2} R^3 \left( \sqrt{12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}} - 3\sqrt{2}R \right)^2}{9H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2} &= \\ &= \frac{\left( \sqrt{24H^2+25R^2} + R \right)^2}{2}, \end{aligned}$$

последнюю формулу можно упростить:

$$V = \frac{\pi \sqrt{2} R^3 \left( \sqrt{24H^2+25R^2} - 5R \right)^2}{18H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Задача о лежащем цилиндре решена!

**Упражнение 17.** Найдите максимально возможный объем, высоту и радиус основания лежащего цилиндра, вписанного в данный стоячий цилиндр, если радиус основания стоячего цилиндра равен  $R$ , а высота не меньше  $2R\sqrt{2/3}$ .

### Что лучше – лежать или стоять?

Впишем в данный конус лежащий и стоячий цилиндры максимально возможных объемов. Интересно, какой будет больше?

При  $H \leq R$  ответ на этот вопрос получить легко:

$$\frac{2}{27} \pi R H^2 \leq \frac{2}{27} \pi R^2 H = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{27} \pi R^2 H,$$

так что объем лежащего бревна как минимум вдвое меньше объема максимального стоячего бревна.

При  $H \geq R$  отношение объемов равно

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{\left( \sqrt{24k^2+25} - 5 \right)^2}{k^2 \sqrt{6k^2+5+\sqrt{24k^2+25}}},$$

где  $k = H/R$ .

**Упражнение 18.** Докажите, что при  $H \geq R$  отношение максимальных объемов лежащего и стоячего цилиндров не превосходит  $2\sqrt{2}/3$ , причем значение  $2\sqrt{2}/3$  достигается при  $k = \sqrt{6}$ .

### Не бревно для шалаша, а шалаш для бревна

Интересно, а если не в шалаш засовывать максимальное бревно, а наоборот, строить шалаш для бревна? Другими словами, поставим задачу: *описать конус вокруг цилиндра высоты  $2h$  и радиуса основания  $r$  так, чтобы образующая цилиндра была параллельна плоскости основания конуса, а объем конуса был минимальным.*

Мы приведем только краткий набросок решения, оставив часть вычислений и обоснований читателю. Вспомним выведенные выше формулы, не забыв заметить  $k$  на  $H/R$  и  $x$  на  $h$ .

Имеем:

$$2r = H(R - h)/R$$

при  $h \in [d; R)$ , т.е. при

$$h \geq \frac{RH^2}{2R^2 + H^2};$$

далее,

$$\left(R + \frac{H}{R} \cdot r\right)^2 = \left(1 + \frac{H^2}{R^2}\right)(R^2 - h^2)$$

при  $h \leq RH^2/(2R^2 + H^2)$ .

В случае равенства  $h = d$  имеем

$$\begin{aligned} 2r &= \frac{H(R - h)}{R} = H\left(1 - \frac{h}{R}\right) = \\ &= H\left(1 - \frac{H^2}{2R^2 + H^2}\right) = \frac{2HR^2}{2R^2 + H^2}; \end{aligned}$$

значит,

$$\frac{r}{h} = \frac{HR^2}{RH^2} = \frac{R}{H},$$

так что  $R = H \cdot \frac{r}{h}$ . Тогда, поскольку  $h = d$ , находим

$$h = \frac{RH^2}{2R^2 + H^2} = \frac{H \cdot \frac{r}{h} \cdot H^2}{2H^2 \cdot \frac{r^2}{h^2} + H^2} = \frac{Hrh}{2r^2 + h^2},$$

откуда

$$H = \frac{2r^2 + h^2}{r} = 2r + \frac{h^2}{r}.$$

Итак,

$$R = \begin{cases} \frac{hH}{H - 2r}, & \text{если } 2r < H \leq 2r + \frac{h^2}{r}; \\ \frac{H\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{H^2 - 2rH - h^2}}, & \text{если } H \geq 2r + \frac{h^2}{r}. \end{cases}$$

Утроенный объем конуса равен

$$3V(H) = HR^2.$$

Поэтому надо рассмотреть две функции:  $f(H) = \frac{H^3 h^2}{(H - 2r)^2}$  и  $g(H) = \frac{H^3(r^2 + h^2)}{H^2 - 2rH - h^2}$ . Производная первой из них равна нулю при  $H = 3r$ . А производная второй обращается в ноль, если

$$H^2 - 4rH - 3h^2 = 0.$$

На основании этого можно получить ответ: минимальный объем конуса равен

$$\frac{9\pi r h^2}{2} \text{ при } h \geq 2r$$

и

$$\frac{\pi(r^2 + h^2)\left(2r + \sqrt{4r^2 + 3h^2}\right)^3}{6\left(h^2 + 2r^2 + r\sqrt{4r^2 + 3h^2}\right)} \text{ при } h \leq 2r.$$

**Упражнение 19.** Рассмотрим конус и впишем в него а) стоячий; б) лежащий цилиндр максимального объема. Верно ли, что для полученного цилиндра исходный конус будет конусом минимального объема (из всех конусов с той же осью и той же плоскостью основания)?

### Задачи для размышления

Задача о минимальном объеме конуса решена. Тем не менее, остался ряд нерешенных задач. Если вам удастся решить одну из следующих (или аналогичных им) задач – сообщите об этом в редакцию журнала!

1. Цилиндр объема  $V$  расположен в конусе объема  $W$ . Верно ли, что  $V/W \leq 2/9$ ?

2. Дан «лежащий на боку» цилиндр, радиус основания которого равен  $r$ , а высота –  $h$ . Найдите описанный «стоячий» конус, площадь боковой поверхности которого минимальная из возможных.

3. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в цилиндре, радиус основания которого равен  $r$ , а высота –  $h$ .

4. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в конусе, радиус основания которого равен  $r$ , а высота –  $h$ , если требуется, чтобы а) вершина внутреннего конуса лежала в центре основания внешнего конуса; б) одна из образующих внутреннего конуса лежала на основании внешнего конуса.

5. Найдите наибольший радиус круга, который можно разместить в конусе с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ .