

ной и ионной составляющих в давление плазмы), получим  $kT \approx \frac{1}{2} \frac{GM_0 m}{R_0}$ . Численные оценки дают  $T \approx 11$  млн кельвинов.

5. В системе отсчета, связанной со стенкой, скорость частицы равна  $v = v_0 + a_0 \omega \sin \omega t$ . Поэтому дополнительная скорость, приобретаемая (теряемая) в момент столкновения, равна  $2a_0 \omega \sin \omega t$ , а скорость частиц после отражения лежит в пределах  $(v_0 - 2a_0 \omega, v_0 + 2a_0 \omega)$ . Вероятность иметь конкретное значение скорости из указанного интервала определяется вероятностью столкновения со стенкой в определенный момент времени. Введем функцию распределения частиц по скоростям:  $F(v)dv = \frac{dt}{T/2}$ , где  $dt$  – интервал времени, в течение которого скорость частицы находилась в интервале от  $v$  до  $v + dv$ , а  $T = 2\pi/\omega$  – период колебаний стенки. Учитывая, что  $dt = dv / (2a_0 \omega^2 \cos \omega t)$ , после преобразований получаем

$$F(v)dv = \frac{1}{\pi a_0 \omega^2} \frac{dv}{\sqrt{1 - ((v - v_0)/(2a_0 \omega))^2}}$$

6. Разность фаз двух волн, распространяющихся от каждой из щелей под углом  $\theta$  к оси, равна

$$\Delta\phi = \omega\tau = \omega \frac{2a \sin \theta}{c}$$

Тогда распределение интенсивности на экране имеет вид

$$I = I_0 |1 + \exp(i\Delta\phi)|^2 = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\omega a}{c} \sin \theta \right),$$

где  $I_0$  – интенсивность излучения при одной открытой щели. При выполнении условия  $(\omega a \sin \theta)/c > \pi/2$  возникает направление, под которым интенсивность излучения равна нулю.

7. Запишем уравнение для изменения энергии фотона при удалении от поверхности звезды:

$$\hbar d\omega = -G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{M}{r^2} \frac{\hbar\omega}{c^2} dr,$$

откуда получаем  $\lambda = \lambda_0 \exp(R_g/(2R))$ , где  $R$  – радиус звезды,  $R_g = 2GM/c^2$  – гравитационный радиус. Для Солнца

$$R \gg R_g \text{ и } \Delta\lambda = \lambda_0 \frac{GM}{R_0 c^2} \approx 0,023 \text{ \AA}, \text{ для нейтронной звезды}$$

$$\Delta\lambda \approx 0,1\lambda_0 \approx 650 \text{ \AA}.$$

Устный командный тур

**МАТЕМАТИКА**

- 6/11 часа.
- Нет.
- $c + h_c > a + b$ .
- Может (см. рис.38).
- $1 + 2 + \dots + 99 + 101 = 5051$ .
- а) Нет; б) нет.
- Нет. Пример – последовательность  $a_n = 2^n$ .
0. *Указание.* Представим исходную таблицу в виде суммы двух таблиц

0	0	...	0	1	2	...	10
10	10	...	10	1	2	...	10
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
80	80	...	80	1	2	...	10
90	90	...	90	1	2	...	10

Если расставить знаки «+» в соответствии с указанным правилом, сумма чисел в каждой из складываемых таблиц будет равна 0.

9. 2001384.

10. 7. *Указание.* Докажите, что каждый из игроков проиграл не менее чем трем партнерам. Игрок, выигравший наибольшее количество партий, победил не меньше 3 своих противни-

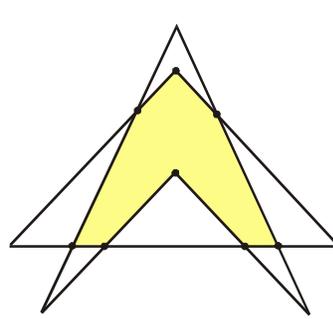


Рис. 38

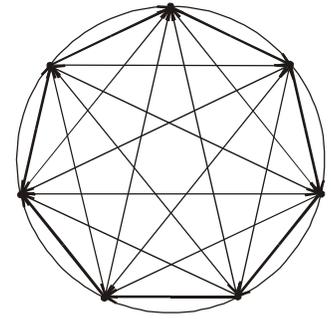


Рис. 39

ков (иначе поражений было бы больше, чем побед). Итак, каждый играл не меньше 6 партий, так что общее количество участников не меньше 7. На рисунке 39 игроки изображены вершинами правильного 7-угольника, а стрелки идут от победителей к побежденным.

- $\sqrt[3]{32} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}$ .
- $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ .

**ФИЗИКА**

- $v_b = 2v$ .
- $a = 2g$ ;  $h \geq m/(\rho_b S)$ , где  $m$  – масса шарика,  $S = \pi R^2$  – площадь его поперечного сечения,  $\rho_b$  – плотность воздуха.
- Нет. Надо учесть изменение энергии космолета. Тогда получится опять 5 МДж (что очевидно в системе отсчета, связанной с космолетом).
- Колебаний не будет, поскольку искусственная сила тяжести направлена вдоль нити.
- Можно. Достаточно взять пластиковую бутылку, в которой плавает тело, содержащее воздух и опущенное отверстием вниз (например, пипетка).
- Сосуд содержит жидкий азот и его пары при температуре порядка  $77^\circ\text{C}$ . Масса паров около 4 г. Надо откачать приблизительно 26 г.
- Увеличение давления будет одинаковым и равным  $\Delta p = 2Q/(3V)$ , где  $V$  – общий объем сосуда.
- $v = 0$ , если  $v_0 < v_1 = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 Rm}}$ ;  $v = v_0$ , если  $v_0 > v_1$ .
- $\phi = 10$  В.
- Асфальт рассеивает свет во все стороны, а лужа отражает большую часть света вперед.

*История научных идей и открытий*

**МАТЕМАТИКА**

- Это Декарт, по сути нащупавший идею условного рефлекса.
- Это число 17, знаменитое еще и тем, что правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой. *Указание.* Если  $x$  и  $y$  – целые числа, для которых  $2(x + y) = xy$ , то либо  $x = y = 4$ , либо  $x = 3$  и  $y = 6$ . В первом случае  $xy = 16$ , во втором  $xy = 18$ .
- Предположим, что многочлен с целыми коэффициентами  $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  – генератор простых чисел. Очевидно, что  $a_n \neq 0$ . Если  $|a_n| > 1$ , то при всех достаточно больших целых  $k$ , делящихся на  $|a_n|$ , число  $p(k)$  будет составным. Если  $|a_n| = 1$  и  $p(1)$  – простое число, то рассмотрим многочлен  $p(k+1) = kq(k) + p(1)$ . При достаточно больших  $k$ , делящихся на  $p(1)$ ,  $p(k+1)$  делится на  $p(1)$  и не является простым числом.
- Гиппократ пытался решить задачу о квадратуре круга, т.е. о построении циркулем и линейкой квадрата, равновеликого данному кругу. Решена эта задача была в 1882 году Линдемано, доказавшим трансцендентность числа  $\pi$  и тем самым ус-