

где функции $f(t) = t^5 + t$, $g(t) = t^3 + t$ — строго возрастают, и равносильна такой:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

5. *r.* 6. а) 183; б) 152; в) 131. *Указания.*

а) Ясно, что количество полосок не больше чем $\left\lfloor \frac{918}{5} \right\rfloor = 183$, а 183 полоски вырезать можно. Для этого из листа 27×34 следует вырезать угловой прямоугольник 7×9 , оставшаяся

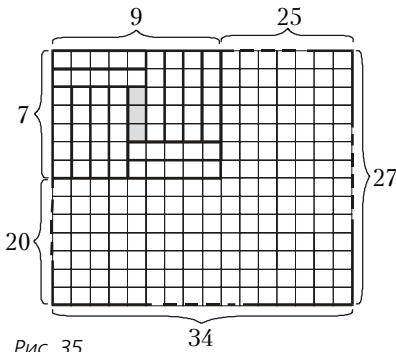


Рис. 35

часть без труда разрезается на полоски 1×5 , а из прямоугольника 7×9 вырезаются 12 полосок 1×5 , причем остаются 3 клетки (рис. 35).

б) Несмотря на то что 918 делится на 6, разрезать лист 27×34 на полоски 1×6 нельзя. Чтобы убедиться в этом, раскрасим клетчатую доску в 6 цветов, как показано на рисунке 36, а (цвета обозначены цифрами).

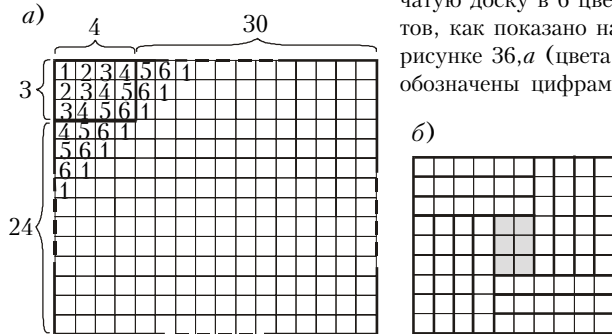


Рис. 36

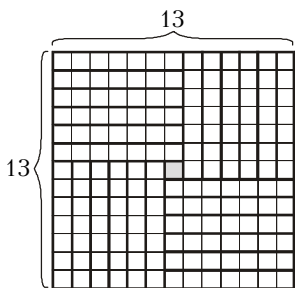
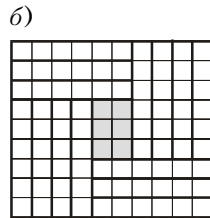


Рис. 37

Если бы доску можно было разрезать на полоски 1×6 , клеток всех цветов было бы поровну. Однако вне углового прямоугольника 3×4 клеток всех цветов поровну, а в самом прямоугольнике — по одной клетке цветов 1 и 6, по две — цветов 2 и 5 и по 3 — цветов 3 и 4. На рисунке 36, б показано, как из прямоугольника 9×10 можно вырезать 14 полосок 1×6 . Далее (как и при решении пункта а)), можно

вырезать из листа угловой прямоугольник 9×10 и оставшуюся часть разрезать очевидным образом на полоски 1×6 .

в) Из листка 27×34 вырезается угловой квадрат 13×13 и разрезается так, как показано на рисунке 37. Оставшаяся часть листа без труда разрезается на полоски 1×7 .

7. а) 4; б) $n - 1$. *Указания.* а) Поскольку все количества рукопожатий различны, имеется человек, сделавший 8 рукопожатий, т.е. пожавший руку всем, кроме своей жены (мужа), причем это не миссис Браун. Пусть, для определенности, это мистер Смит. Тогда его жена не сделала ни одного рукопожатия (убедитесь в этом). Удалим эту пару. Останутся 4 пары. Для этих пар выполняются все условия задачи. Снова удалим пару супругов и т.д. б) После сделанных замечаний в пункте а) здесь индукция практически очевидна.

ФИЗИКА

1. Используя цилиндрическую систему координат (r, φ) , запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mr'^2}{2} + \frac{m}{2}(r\dot{\varphi})^2 - \frac{\alpha}{r^n} = E_0,$$

или, воспользовавшись законом сохранения момента импульса $L_0 = mr^2\dot{\varphi}$:

$$\frac{mr'^2}{2} + \left(\frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n} \right) = E_0.$$

Здесь E_0 — полная энергия системы, а величина

$$U_{\text{эф}} = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

играет роль эффективной потенциальной энергии. Падению частицы на центр соответствует условие $r \rightarrow 0$. В случае $n < 2$ падение на центр невозможно ни при каких начальных условиях. В случае $n > 2$ падение на центр возможно, причем значения начальной скорости и радиальной координаты частицы легко могут быть получены из анализа зависимости $U_{\text{эф}}(r)$.

2. Существенной особенностью рассматриваемой задачи является то, что релятивистский эффект прекращения ускорения частицы в циклотроне (вследствие потери резонанса) наступает в нерелятивистской области энергий. Действительно, запишем выражение для частоты обращения протона в циклотроне:

$$\omega = \frac{eB}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где v — скорость протона. Для разности периодов обращения частицы и изменения знака ускоряющего поля между дуанатами имеем

$$\Delta T = 2\pi(1/\omega - 1/\Omega_0),$$

где Ω_0 — частота поля между дуанатами. Учитывая, что $\Omega_0 = eB/m$, получим

$$\Delta T = \frac{2\pi}{eB} E_k,$$

где E_k — кинетическая энергия ускоряемого протона. За N оборотов протон набирает энергию $E_{\text{max}} = 2eU_0N$. Оценивая число оборотов, совершаемое протоном до выхода из резонансного режима ускорения, из условия $\Delta TN = T/4$ получим

$$E_{\text{max}} \approx \sqrt{eU_0 mc^2} \approx 3 \text{ МэВ}.$$

3. Уравнение адиабаты имеет вид $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = c_p/c_v$ — показатель степени адиабаты. В двумерном и одномерном случаях под «объемом» понимается площадь поверхности и линейный размер, занимаемый газом. Соответственно, «давление» имеет размерность силы, действующей на единицу длины, и просто силы. Для одного моля газа $c_p = c_v + R$, где R — универсальная газовая постоянная. Поскольку $c_v = iR/2$, где i — число степеней свободы, для одно- двух- и трехмерного случаев получаем, соответственно, $\gamma = 3$, $\gamma = 2$ и $\gamma = 5/3$.

4. Запишем условие равновесия звезды в виде

$$\frac{dp}{dr} = G \frac{M(r)}{r^2} \rho(r),$$

где $p(r)$, $\rho(r)$ — распределения давления и плотности по радиусу, $M(r)$ — масса части звезды, заключенная внутри сферической оболочки радиусом r . Будем считать, что распределение плотности по радиусу является однородным, и оценим градиент давления как $dp/dr \approx p_0/R_0$ (здесь p_0 — давление в центре звезды, R_0 — ее радиус). Тогда, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $p = 2 \frac{\rho}{m} kT$ (m — масса протона, множитель «2» возникает за счет вклада электрон-