где функции $f(t) = t^5 + t$, $g(t) = t^3 + t$ – строго возрастают, и равносильна такой:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x^2 = 2y. \end{cases}$$

5. *r*. **6.** а) 183; б) 152; в) 131. *Указания.*
а) Ясно, что количество полосок не больше чем $\left[\frac{918}{5}\right] = 183$, а 183 полоски вырезать можно. Для этого из листа 27×34 следует вырезать угловой прямоугольник 7×9, оставшаяся часть без труда разрезается на полоски 1×5, а из прямоугольника 7×9 вырезаются 12 полосок 1×5, причем остаются 3 клетки (рис.35).

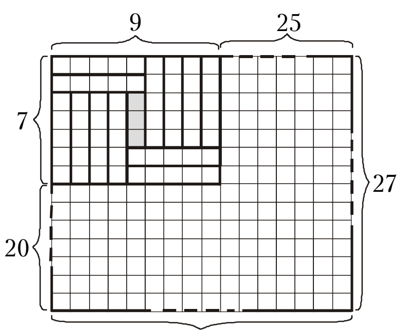

Рис. 35

б) Несмотря на то что 918 делится на 6, разрезать лист 27×34 на полоски 1×6 нельзя. Чтобы убедиться в этом, раскрасим клетчатую доску в 6 цветов, как показано на рисунке 36,*а* (цвета обозначены цифрами).

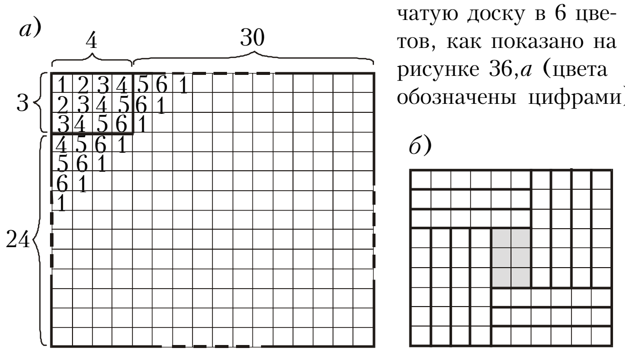

Рис. 36

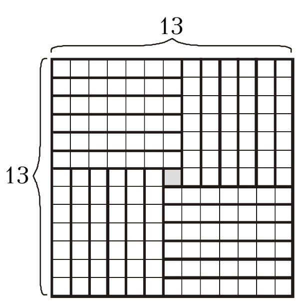

Рис. 37

Если бы доску можно было разрезать на полоски 1×6, клеток всех цветов было бы поровну. Однако вне углового прямоугольника 3×4 клеток всех цветов поровну, а в самом прямоугольнике – по одной клетке цветов *1* и *6*, по две – цветов *2* и *5* и по 3 – цветов *3* и *4*. На рисунке 36,*б* показано, как из прямоугольника 9×10 можно вырезать 14 полосок 1×6. Далее (как и при решении пункта *а*)), можно вырезать из листа угловой прямоугольник 9×10 и оставшуюся часть разрезать очевидным образом на полоски 1×6.
в) Из листка 27×34 вырезается угловой квадрат 13×13 и разрезается так, как показано на рисунке 37. Оставшаяся часть листа без труда разрезается на полоски 1×7.
7. а) 4; б) $n - 1$. *Указания.* а) Поскольку все количества рукопожатий различны, имеется человек, сделавший 8 рукопожатий, т.е. пожавший руку всем, кроме своей жены (мужа), причем это не миссис Браун. Пусть, для определенности, это мистер Смит. Тогда его жена не сделала ни одного рукопожатия (убедитесь в этом). Удалим эту пару. Останутся 4 пары. Для этих пар выполняются все условия задачи. Снова удалим пару супругов и т.д. б) После сделанных замечаний в пункте а) здесь индукция практически очевидна.

ФИЗИКА

1. Используя цилиндрическую систему координат (r, φ), запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mr'^2}{2} + \frac{m}{2}(r\varphi)^2 - \frac{\alpha}{r^n} = E_0,$$

или, воспользовавшись законом сохранения момента импульса $L_0 = mr^2\varphi$:

$$\frac{mr'^2}{2} + \left(\frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n}\right) = E_0.$$

Здесь E_0 – полная энергия системы, а величина $U_{\text{эф}} = \frac{L_0^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n}$ играет роль эффективной потенциальной энергии. Падению частицы на центр соответствует условие $r \to 0$. В случае $n < 2$ падение на центр невозможно ни при каких начальных условиях. В случае $n > 2$ падение на центр возможно, причем значения начальной скорости и радиальной координаты частицы легко могут быть получены из анализа зависимости $U_{\text{эф}}(r)$.
2. Существенной особенностью рассматриваемой задачи является то, что релятивистский эффект прекращения ускорения частицы в циклотроне (вследствие потери резонанса) наступает в нерелятивистской области энергий. Действительно, запишем выражение для частоты обращения протона в циклотроне:

$$\omega = \frac{eB}{m}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где v – скорость протона. Для разности периодов обращения частицы и изменения знака ускоряющего поля между дуанатами имеем

$$\Delta T = 2\pi\left(1/\omega - 1/\Omega_0\right),$$

где Ω_0 – частота поля между дуанатами. Учитывая, что $\Omega_0 = eB/m$, получим

$$\Delta T = \frac{2\pi}{eB}E_k,$$

где E_k – кинетическая энергия ускоряемого протона. За N оборотов протон набирает энергию $E_{\max} = 2eU_0N$. Оценивая число оборотов, совершаемое протоном до выхода из резонансного режима ускорения, из условия $\Delta TN = T/4$ получим $E_{\max} \approx \sqrt{eU_0mc^2} \approx 3$ МэВ.
3. Уравнение адиабаты имеет вид $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = c_p/c_V$ – показатель степени адиабаты. В двумерном и одномерном случаях под «объемом» понимается площадь поверхности и линейный размер, занимаемый газом. Соответственно, «давление» имеет размерность силы, действующей на единицу длины, и просто силы. Для одного моля газа $c_p = c_V + R$, где R – универсальная газовая постоянная. Поскольку $c_V = iR/2$, где i – число степеней свободы, для одно- двух- и трехмерного случаев получаем, соответственно, $\gamma = 3$, $\gamma = 2$ и $\gamma = 5/3$.
4. Запишем условие равновесия звезды в виде

$$\frac{dp}{dr} = G\frac{M(r)}{r^2}\rho(r),$$

где $p(r)$, $\rho(r)$ – распределения давления и плотности по радиусу, $M(r)$ – масса части звезды, заключенная внутри сферической оболочки радиусом *r*. Будем считать, что распределение плотности по радиусу является однородным, и оценим градиент давления как $dp/dr \approx p_0/R_0$ (здесь p_0 – давление в центре звезды, R_0 – ее радиус). Тогда, воспользовавшись уравнением состояния идеального газа $p = 2\frac{\rho}{m}kT$ (m – масса протона, множитель «2» возникает за счет вклада электрон-