Из подобия треугольников MAN и CDN следует $\frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN}$.

Таким образом, $\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{AB} = \frac{MC}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN}$. Треугольники MBD и BDN имеют равные углы: $\angle ABD = \angle BDA$ и прилегающие к ним пропорциональные стороны. Следовательно, эти треугольники подобны: $\Delta MBD \backsim \Delta BDN$. Поскольку углы между соответственными сторонами подобных треугольников равны, то искомый угол $\angle BSD = 60^\circ$.

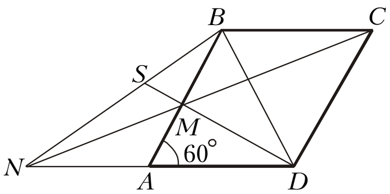

Рис. 7

4. *Первый способ.* Запишем исходное уравнение в виде

$$(yz+1)(5-3x) = 3z.$$

В левой части не может стоять отрицательное число, а это возможно только лишь при $x = 1$. Но тогда число z должно быть четным; обозначим $z = 2k$, где натуральное $k \geq 1$. Исходное уравнение запишется так:

$$(2ky+1)\cdot 2 = 6k, \text{ или } 2ky+1 = 3k.$$

Отсюда $y = \frac{3k-1}{2k} = 1 + \frac{k-1}{2k}$. Выражение $\frac{k-1}{2k}$ может быть целым неотрицательным числом только при $k = 1$. Тогда $y = 1$, $z = 2$, и получаем ответ: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

Второй способ. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{5}{3} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}},$$

или

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}.$$

Отсюда $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ – единственное решение в натуральных числах.

5. Поскольку $40 = 1\times 40 = 2\times 20 = 4\times 10 = 5\times 8$, то возможны 4 варианта различных таблиц. Рассмотрим их по отдельности.

1) В таблице 1 столбец и 40 строк. В этом случае вблизи каждой буквы У может быть не более двух букв А. Но тогда не более чем у $7\times 2 = 14$ букв А вблизи будет буква У – противоречие.

2) В таблице 4 столбца и 10 строк.

Разобьем такую таблицу на 8 частей (жирные линии на рисунке 8) и в каждой части одну клетку пометим крестиком. В каждой части непременно должна быть хотя бы одна буква У. В противном случае вблизи буквы А, стоящей в этой части в помеченной крестиком клетке, не будет буквы У, что противоречит условию. Но частей 8, а букв У только 7 – не хватает!

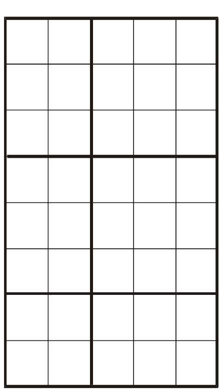

Рис. 8 Рис. 9

3) В таблице 5 столбцов и 8 строк. Разобьем такую таблицу на 6 частей (жирные линии на рисунке 9). В каждой части должно находиться не более одной буквы У, иначе найдутся буквы А, граничащие с двумя буквами У. Таким образом, в таблице можно разместить не более 6 букв У – противоречие.

4) В таблице 2 столбца и 20 строк. Одна из возможных расстановок букв показана на рисунке 10. Возможны и другие расстановки, однако все они обладают общим свойством: поскольку вблизи буквы У может стоять только буква А, то каждая буква У может стоять только в отдельной строке. После вычеркивания 7 строк с буквой У останется 13 строк с буквой А. Всего останется 26 букв А.

Калейдоскоп «Кванта»

Задачи

1. См. рис.11. **2.** См. рис.12. **3.** См. рис.13.

4. См. рис.14.

5. *Указание.* Сначала проведите разрезы везде, где граничат клетки одного цвета. *Ответ* – на рисунке 15.

6. а) Проведите высоту. (В остроугольном треугольнике – любую, а в тупоугольном – из вершины тупого угла.)

б) Разрежьте сначала треугольник на прямоугольные треугольники, а затем в каждом из них проведите медиану из вершины прямого угла (рис.16).

7. Если треугольник остроугольный, то можно соединить центр описанной окружности с вершинами. А в общем случае достаточно рассмотреть вписанную окружность и соединить ее центр с точками касания (рис.17).

Рис. 10

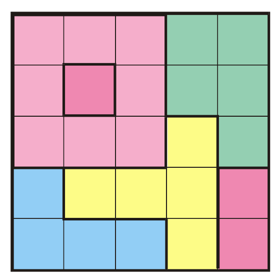

Рис. 11

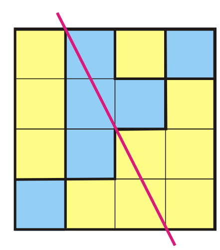

Рис. 12

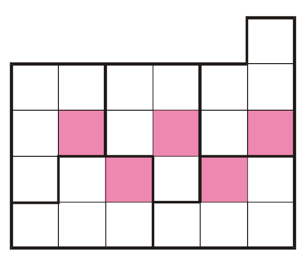

Рис. 13

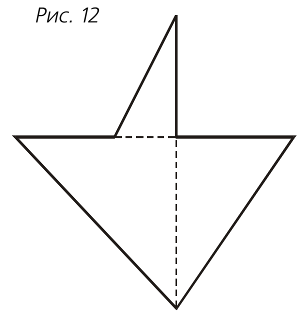

Рис. 14

8. а) См. рис.18.

б) Может. Разрежьте плоскость на правильные шестиугольники, а затем каждый из них – как в пункте а).

9. Решения первых трех пунктов есть на странице 62 «Кванта» №4 за 2001 год. А решение пункта г), как и нескольких следующих задач, заимствованных из раздела «Задачник «Кванта», ищите в соответствующих номерах журнала.

11. Начнем с правильного семиугольника (рис.19). Из его центра проведем лучи и окружность, выберем на них 7 точек