9. Кратчайший отрезок соединяет точки $\left(a+\sqrt[3]{a^2b};\,0\right)$ и $\left(0;\,b+\sqrt[3]{ab^2}\right)$. Расстояние равно $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

10. При $d \le \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$.

15. Параметрически огибающая задается формулами $x = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2a^3}$ и $y = \frac{a^3}{2} + \frac{3}{2a}$. График изображен на рисунке 1.

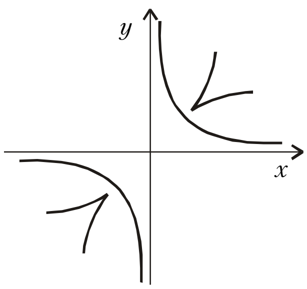

Рис. 1

17. Достаточно устремить H к бесконечности в полученной формуле для объема. Предел равен $4\pi R^3/\left(3\sqrt{3}\right)$. Высота цилиндра $2R/\sqrt{3}$, радиус основания $R\sqrt{2/3}$

18. *Указание.* Сделайте замену $t = \sqrt{24k^2+25}$.

19. а) Верно. б) Нет. Сколь большой ни была бы высота H данного конуса, высота и диаметр основания лежачего цилиндра не могут превзойти диаметра основания R конуса. Любой такой цилиндр можно поместить внутрь некоторого конуса, высота и радиус основания которого зависят только от R, а не от H.

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Пусть x пчел сидят в вершинах кубика, y – на ребрах, а z – на внутренних точках граней. Тогда количество пчел, подсчитанное по всем граням (с учетом повторений), равно

$$S = 3x + 2y + z.$$

По условию,

$$S \ge 0+1+2+3+4+5 = 15.$$

Следовательно, $3x+2y+z = 3(x+y+z)-(y+2z) \ge 15$. Отсюда получаем, что общее число пчел

$$n = x+y+z \ge 5 + \frac{y+2z}{3}.$$

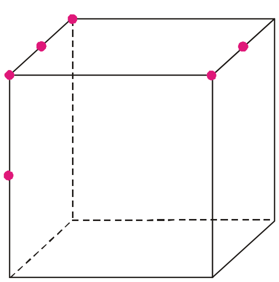

Рис. 2

Если $n = 5$, то $S = 15$, а $y = z = 0$. Это означает, что все пчелы сидят в вершинах кубика. Легко проверить, что в этом случае обязательно найдутся две грани с одинаковым количеством пчел. Следовательно, $n \ge 6$. На рисунке 2 показано расположение 6 пчел, удовлетворяющее условию задачи.

2. Искомыми числами являются, например, следующие:

$$(1103)^3 = 1334633301;\ (1011)^3 = 1033364331.$$

3. Отразим отрезок AC симметрично относительно прямой AM; на стороне AB получим отрезок AC_1 (рис.3). Так как $AB = BC$, $AC_1 = AC$, то $BC_1 = MC = MC_1$, и треугольник MBC_1 равнобедренный.

Пусть $\angle BAM = \alpha$, тогда $\angle MAC = \alpha$; $\angle MCA = 2\alpha = \angle MC_1A$; $\angle C_1BM = \angle BMC_1 = \alpha$. В треугольнике ABC $\angle A + \angle B + \angle C = 5\alpha = 180^\circ$ отсюда $\alpha = 36^\circ$. Итак, углы треугольника ABC: $\angle A = \angle C = 72^\circ$; $\angle B = 36^\circ$.

4. Нельзя. Покажем, что уравнение

$$x^2+y^2+z^2 = 2^t \qquad (*)$$

не имеет решений в натуральных числах x, y, z, t. Предположим противное, тогда в правой части равенства (*) стоит четное число. Это возможно в одном из двух случаев:

а) x, y, z четные;

б) одно из чисел x, y, z четно, остальные нечетные.

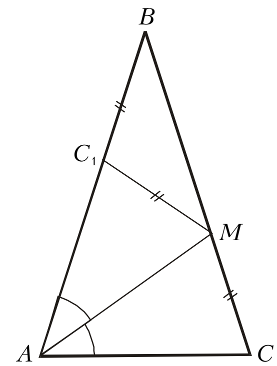

Рис. 3

Случай а) приводится к случаю б) после сокращения левой части равенства (*) на наибольшую возможную степень двойки. В случае б), не умаляя общности, предположим, что $x = 2a+1$; $y = 2b+1$; $z = 2c$. Тогда в левой части (*) получим

$$x^2+y^2+z^2 = 4a^2+4a+1+4b^2+4b+1+4c^2$$

– число, которое при делении на 4 дает остаток 2. Однако в правой части (*) стоит число, делящееся на 4. Противоречие.

5. Можно. Построим стол, удовлетворяющий условию задачи. Для этого в прямоугольнике $PQRS$ со сторонами $PS = QR = 3$, $PQ = RS = \frac{\sqrt{399}}{10}$ построим «зигзагообразную» фигуру, показанную на рисунке 4. Вершины $C_1, C_2, \ldots, C_{31}$ этой фигуры лежат на оси симметрии прямоугольника $PQRS$, вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ – на стороне PS прямоугольника на равном удалении друг от друга: $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{29}A_{30} = \frac{1}{10}$; вершины $B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ лежат на стороне QR на таком же удалении друг от друга; $PA_1 = QB_1 = A_{30}S = B_{30}R = \frac{1}{20}$; $C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_{30}C_{31} = \frac{1}{10}$; длины отрезков, соединяющих вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{30}, B_1, B_2, \ldots, B_{30}$ с ближайшими к ним вершинами $C_1, C_2, \ldots, C_{31}$ на оси прямоугольника, равны 1. Несложно подсчитать, что площадь «зигзагообразной» фигуры составляет $\frac{3}{4}$ площади S_{PQRS} прямоугольника $PQRS$. Эту фигуру можно протащить сквозь проход ширины 1, попеременно наклоняя ее то в одну, то в другую сторону.

Для того чтобы фигура при протаскивании не касалась стен комнаты, сделаем по ее краям два треугольных выреза, показанных на рисунке 5, здесь

$$\angle PSK = \angle LRQ = \frac{1}{2}\angle A_{29}C_{30}A_{30} = \angle B_{30}C_{31}R.$$

Заметим, что $\Delta PSK = \Delta QRL$, $\Delta PSK \backsim \Delta A_{29}C_{30}N$ (см. рис.6). Поскольку $A_{29}N = \frac{1}{20}$ и $NC_{30} = \frac{\sqrt{399}}{20}$, то площадь треугольника $A_{29}C_{30}N$ равна $S_{\Delta A_{29}C_{30}N} = \frac{\sqrt{399}}{800}$. Соответственно, площадь подобного ему треугольника PSK равна

$$S_{\Delta PSK} = \frac{9}{399/400} S_{\Delta A_{29}C_{30}N} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{399}}.$$

Площадь «зигзагообразной» фигуры после вырезания треугольников PSK и LRQ не меньше чем

$$\frac{3}{4}S_{PQRS} - 2S_{\Delta PSK} = \frac{3}{4}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{399}}{20} - \frac{9}{\sqrt{399}} = \frac{3231}{40\sqrt{399}}.$$

Последнее число, как нетрудно убедиться, больше 4.

Итак, в качестве стола можно взять, например, «зигзагообразную» фигуру, показанную на рисунке 5.