4 (С.Соколов). Просуммируем все $S(a)$. На i-м месте каждое из чисел от 1 до n встретится по $(n-1)!$ раз. Поэтому сумма выражений $S(a)$ для всех $n!$ перестановок есть

$$M = \left(k_1(1+\ldots+n) + k_2(1+\ldots+n) + \ldots + k_n(1+\ldots+n)\right)(n-1)! =$$

$$= (n-1)!\frac{n(n+1)}{2}\left(k_1+\ldots+k_n\right) = n!\frac{n+1}{2}\left(k_1+\ldots+k_n\right) \equiv 0 \pmod{n!},$$

так как из нечетности n следует, что $\frac{n+1}{2}$ – целое число.

Предположим, что искомых перестановок не существует. Тогда остатки от деления всех $S(a)$ на $n!$ различны. Всего этих остатков $n!$, поэтому

$$M \equiv 1+2+\ldots+n! = \frac{(n!+1)n!}{2} \pmod{n!}.$$

Таким образом,

$$\frac{(n!+1)n!}{2} \equiv 0 \pmod{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(n!+1)n!}{2} \vdots n! \Rightarrow \frac{n!}{2} \vdots n!,$$

так как числа $n!-1$ и $n!$ взаимно просты. Получили противоречие; значит, искомые перестановки b и c существуют.

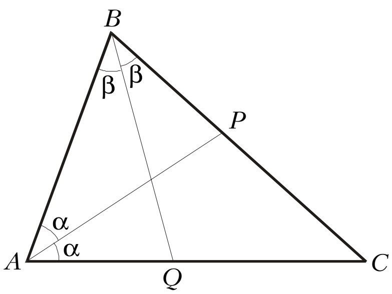

Рис. 2

5 (А.Глазырин). Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ (рис.2).

Так как AP – биссектриса, то

$$BP = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{c \cdot a}{c+b} = c \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma + \sin 2\beta}.$$

Из ΔABQ по теореме синусов

$$AQ = \frac{c\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}, \quad BQ = \frac{c\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)}.$$

Тогда из условия $AQ + BQ = AB + BP$ следует

$$\frac{c\sin\beta + c\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+\beta)} = c + c\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\gamma + \sin 2\beta}.$$

Отсюда, учитывая $\alpha = 30^\circ$, получаем уравнение

$$\frac{\sin\beta + \sin 60^\circ}{\sin\left(60^\circ + \beta\right)} = 1 + \frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(2\beta + 60^\circ\right) + \sin 2\beta},$$

которое преобразуется к виду $\cos\left(30^\circ + \frac{3}{2}\beta\right)(1 - 2\cos\beta) = 0$.

Если $\cos\beta = \frac{1}{2}$, то

$$2\beta = 120^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \ \gamma = 0^\circ,$$

что невозможно. Значит, $\cos\left(30^\circ + \frac{3}{2}\beta\right) = 0$, $30^\circ + \frac{3}{2}\beta = 90^\circ$, $\beta = 40^\circ$. Так как все преобразования были равносильны, то $\beta = 40^\circ$ подходит.

Ответ: $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle BCA = 40^\circ$.

6 (А.Воробьев). Пусть $x = b + d + a - c$, тогда $x > 1$ ($b + d + a - c > b + d > 1$) и $c \equiv a + b + d$, $d \equiv c - a - b$ (здесь и далее сравнения по модулю x). Отсюда следует, что

$$0 \equiv x(b + d - a + c) = ac + bd \equiv a(a + b + d) + bd = (a + b)(a + d)$$

и

$$0 \equiv ac + bd \equiv ac + b(c - a - b) = (a + b)(c - b),$$

т.е.

$$(a + b)(a + d) \vdots x, \ (a + b)(c - b) \vdots x.$$

Возможны два случая.

1) $a + b \vdots x \Rightarrow a + b \vdots a + b + d - c$. Но $c > d$, поэтому $a + b > x < 1$. С другой стороны, в силу $b > c$ имеем: $2x = 2a + 2b + 2d - 2c > 2a + 2d > 2a > a + b$. Итак, $2x > a + b > x > 1$ и $a + b \vdots x$, что невозможно.

2) $a + b \not\vdots x$. Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ – разложение x на простые множители. Тогда существует i $(1 \le i \le k)$ такое, что $a + b \not\vdots p_i^{\alpha_i}$. Отсюда, учитывая, что $(a + b)(a + d) \vdots x$, $x \vdots p_i^{\alpha_i}$, получаем $a + d \vdots p_i$. Аналогично, $b - c \vdots p_i$. Следовательно, $ab + cd = (a + d)b - (b - c)d \vdots p_i$, т.е. $ab + cd$ не является простым, так как $ab + cd > 0$. Утверждение доказано.

Замечание. Андрей едва ли не единственный участник олимпиады, предложивший «явный» способ доказательства утверждения задачи с предъявлением простого делителя выражения $ab + cd$. Решения, известные авторам задачи и задачному комитету, были значительно сложнее приведенного.

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Терешин

XXXII Международная физическая олимпиада

Очередная международная физическая олимпиада школьников прошла в Анталии (Турция) с 28 июня по 6 июля 2001 года. В олимпиаде приняли участие 305 школьников из 65 стран мира (это максимальное число стран-участниц за всю историю проведения международных физических олимпиад).

Российскую команду представляли:

Калинин Вячеслав – г.Клин Московской обл., школа 1,

Климай Петр – г.Курган, лингво-гуманитарная гимназия 47,

Королев Кирилл – г.Челябинск, ФМЛ 31,

Муравьев Вячеслав – г.Смоленск, гимназия им. Пржевальского,

Нургалиев Данияр – г.Москва, СУНЦ МГУ.

По итогам выступления были отмечены наградами 157 участников олимпиады: 22 из них получили золотые медали, 39 – серебряные, 49 – бронзовые, 47 – грамоты. Золотыми медалями были награждены школьники из 12 стран: Китай получил 4 медали, Россия, США и Индия – по 3, Тайвань – 2, Иран, Беларусь, Польша, Украина, Вьетнам, Сингапур и Казахстан – по одной медали.

Российские школьники выступили весьма успешно, набрав 86,8% от максимального числа баллов: 84,7% – за решение теоретических задач и 89,9% – за выполнение экспериментального задания. Они получили 3 золотых и 2 серебряных медали.