

	Очки	Золото	Серебро	Бронза
8. Украина	143	1	5	0
9. Тайвань	141	1	5	0
10. Вьетнам	139	1	4	0
11. Турция	136	1	3	2
12. Белоруссия	135	1	2	3
13. Япония	134	1	3	2
14. Германия	131	1	3	1
15. Румыния	129	1	2	2
16. Бразилия	120	0	4	2
17. Израиль	113	1	2	1
18. Иран	111	0	2	4
19–20. Гонконг	107	0	2	4
19–20. Польша	107	0	3	1

Авторы результатов команд бывших союзных республик, не вошедших в первую двадцатку:

27. Узбекистан	91	0	1	3
35. Эстония	72	0	1	3
36–38. Грузия	71	0	1	3
36–38. Латвия	71	0	1	2
39. Молдавия	70	0	2	1

Команды Азербайджана и Литвы завоевали по одной бронзовой медали.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю благодарность ООО «Краниум» и лично Александру Анатольевичу Черепнину, оказавшим содействие в участии команды России волимпиаде.

Задачи

1. Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Точка P – основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC . Известно, что $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. Докажите, что $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$. (Южная Корея)

- 2. См. задачу M1804 «Задачника «Кванта».
- 3. См. задачу M1805 «Задачника «Кванта».
- 4. Пусть n – нечетное число, большее 1, и k_1, k_2, \dots, k_n – данные целые числа. Для каждой из $n!$ перестановок $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$ положим

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

Докажите, что найдутся такие перестановки b и c , $b \neq c$, что $S(b) - S(c)$ делится на $n!$.

(Германия)

5. В треугольнике ABC биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке P , а биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает сторону CA в точке Q . Известно, что $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB + BP = AQ + QB$. Чему могут равняться значения углов треугольника ABC ?

(Израиль)

6. Пусть a, b, c, d – целые числа такие, что $a > b > c > d > 0$. Предположим, что

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Докажите, что число $ab + cd$ не является простым.

(Болгария)

Решения

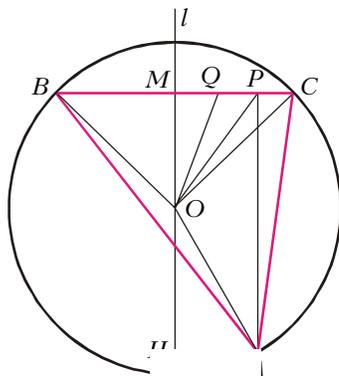


Рис. 1

Приведем решения задач, предложенные нашими школьниками на олимпиаде.

1. **Первое решение** (А.Халаявин). Пусть M – середина BC , l – серединный перпендикуляр к отрезку BC , $AH \perp l$ (рис.1). Тогда из условия $\angle BCA > \angle ABC$ следует, что $P \in [MC]$. Пусть в $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, R – радиус описанной окружности. Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, $\angle BOA = 2\gamma$, $\angle BOM = \alpha = \pi - (\beta + \gamma) \Rightarrow \angle AOH = 2\gamma - (\pi -$

$-\angle BOM) = \gamma - \beta \geq 30^\circ$. Следовательно,

$$AH \geq AO \sin 30^\circ = \frac{R}{2}.$$

По условию задачи требуется доказать, что

$$\angle COP < 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \alpha.$$

Для этого отметим на BC точку Q такую, что $\angle COQ = 90^\circ - \alpha$, и покажем, что $CQ > CP$. Из того, что

$$\angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = 90^\circ - \alpha = \angle COQ,$$

следует подобие треугольников COB и CQO . Поэтому

$$\frac{CQ}{CO} = \frac{CO}{CB} \Rightarrow CQ = \frac{R^2}{BC} > \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}.$$

С другой стороны,

$$CP = CM - PM = \frac{1}{2}BC - AH < \frac{1}{2} \cdot 2R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}.$$

Значит, $CQ > CP$, что и доказывает утверждение задачи.

Приведенное выше геометрическое решение было, конечно, далеко не единственным. Чаще школьники предлагали решения с применением тригонометрии.

Второе решение (А.Глазырин). Воспользуемся уже введенными обозначениями. Из равенства $\angle OCP = 90^\circ - \alpha$ следует, что условие задачи равносильно неравенству $\angle OCP > \angle COP \Leftrightarrow OP > CP$. Но

$$CP = AC \cos \gamma = 2R \sin \beta \cos \gamma,$$

$$OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{1}{2}BC - CP\right)^2},$$

поэтому

$$CP < OP \Leftrightarrow CP^2 < OP^2 \Leftrightarrow 0 < OM^2 + \frac{1}{2}BC^2 - BC \cdot CP \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha - 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cos \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma < 1.$$

Пусть $\gamma - \beta = \delta$. По условию $\delta \geq 30^\circ$, поэтому

$$\sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}(\sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma - \beta)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(180^\circ - \alpha) - \sin \delta) = \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \delta \leq \frac{1}{4},$$

так как $30^\circ < \delta < 150^\circ$ ($\delta = \gamma - \beta < \gamma < 90^\circ$). Значит,

$$4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma < \sin \alpha < 1.$$